HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

L'anticipació del càlcul. Desenvolupament conceptual del càlcul en el segle XVIII. Aritmetització i formulació rigorosa del càlcul.

Apunts de l'assignatura

Mònica Blanco

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2012-2013

Nota: Per a l'elaboració d'aquests apunts en alguns casos he fet servir reproduccions de textos de diversos autors, com a material de suport per al treball a l'aula. En tots els casos n'he indicat la font.

1. LES QUADRATURES D'ARQUIMEDES

Antecedents:

- Els pitagòrics i la crisi dels irracionals (V aC) [*limitació pitagòrica*].
- Paper dominant de la geometria.
- La crisi de l'infinit (IV aC) [*limitació aristotèlica*].
- Quadratura de les *lúnules* d'Hipòcrates de Quios (~450 aC).
- Desenvolupament de teoria de magnituds i proporcions.
- Corbes construïdes geomètricament. *Còniques* d'Apol.loni (262-190 aC).

Euclides i Èudox: mètode d'exhaustió

Llibre XII, *Elements* d'Euclides: fórmules per als volums d'alguns sòlids. Mètode d'exhaustió desenvolupat per Èudox de Cnidus (de l'escola platònica), per treballar àrea de cercle i volums de piràmides, cons i esferes. Mètode de demostració, però no de descobriment.

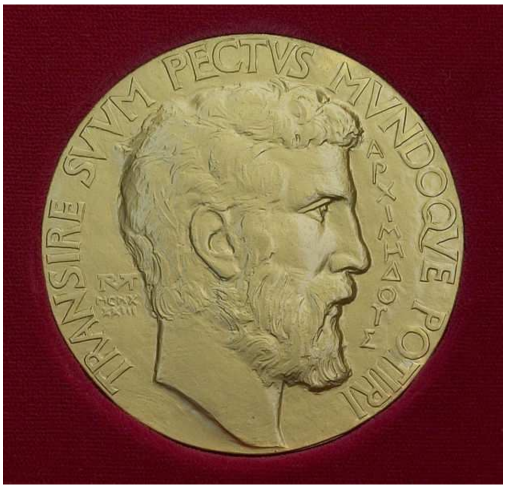
Proposició XII-2: Els cercles són l'un a l'altre com els quadrats dels seus diàmetres.

Prova: La idea és anar "exhaurint" l'àrea d'un cercle amb polígons inscrits, amb nombre creixent de costats. Es pot inscriure un polígon l'àrea del qual difereixi de la del cercle *menys que qualsevol àrea donada*. Suposem que el resultat no fos cert…

http://www.euclides.org/menu/elements_cat/12/proposicio2llibre12.htm

Corba ≅ "polígon d'infinits costats infinitament petits"

Arquimedes de Siracusa (287-212 aC)



Biografia de Plutarc del general romà Marcel, que conquereix Siracusa (212 aC, Segona Guerra Púnica). Fill del matemàtic i astrònom Phidias. Probablement joventut a Alexandria (cargol d'Arquimedes per a l'elevació d'aigua, farina i cereals). Moltes de les seves obres adreçades a erudits d'Alexandria (com Eratòstenes, un dels caps de la biblioteca). Vida a Siracusa i enginyeria militar contra els romans durant el setge de la ciutat, fins la seva derrota. Palanca, politja…

Obres:

- *Sobre l'esfera i el cilindre*
- *Sobre la mesura del cercle*
- *Sobre conoides i esferoides*
- *De les espirals*
- *Sobre l'equilibri dels plans o dels centres de gravetat dels plans*
- *La quadratura de la paràbola*
- *Els cossos flotants*

…

La quadratura del cercle

Aquí primera prova rigorosa del fet que la constant de proporcionalitat de l'àrea del cercle al radi al quadrat, i la de la longitud de la circumferència al seu diàmetre, és la mateixa, π.

Proposició I, *De la mesura del cercle*: L'àrea del cercle és igual a la del triangle de base la longitud de la circumferència i alçada el radi.

$$A = \frac{1}{2} rC$$

Prova: Extensió del mètode d'exhaustió al mètode de compressió, en treballar amb polígons inscrits i circumscrits. Resultats preliminars:

1. El perímetre del polígon inscrit és menor que el del cercle, i aquest és menor que el del polígon circumscrit.
2. Donat un cercle d'àrea A i $\varepsilon > 0$, existeix un polígon regular inscrit tal que la seva àrea és més gran que A menys ε. Anàlogament, existeix un polígon regular circumscrit, l'àrea del qual és menor que A més ε.

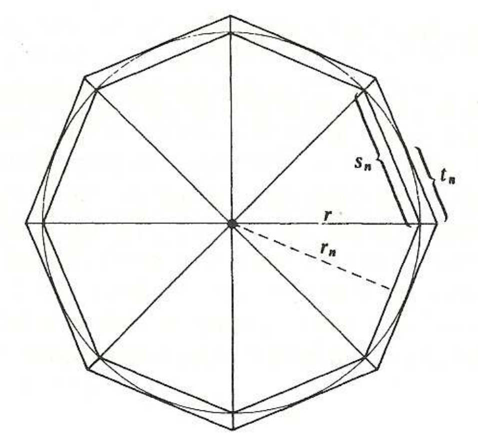


Figure 1

Per *reductio ad absurdum*:

$$A > \frac{1}{2}rC$$

$$\varepsilon = A - \frac{1}{2}rC$$

P polígon regular *n*-costats inscrit; = unió de *n* triangles isòsceles de base s_n i alçada r_n.

$$a(P) > A - \varepsilon = \tfrac{1}{2}rC \text{ (per 2.)}$$

$$r_n < r, ns_n < C$$

$$a(P) = n\frac{1}{2}r_n s_n = \frac{1}{2}r_n(ns_n) < \frac{1}{2}rC$$

Contradicció!! Per tant no pot ser $A > \frac{1}{2}rC$.

Exercici: Acabar la demostració.

La quadratura de l'espiral d'Arquimedes

- L'aplicació més representativa del mètode d'exhaustió grec al problema de les quadratures.
- Gran influència sobre les tècniques de quadratura aritmètica del segle XVII.
- Geometria grega essencialment estàtica, més que dinàmica. Corbes definides en termes de llocs geomètrics (cercle com el lloc dels punts equidistants a un punt fix, per exemple) o com a intersecció de superfícies (còniques). Quant al moviment, només uniforme (lineal o circular, o composició d'aquests dos).

Mètode de compressió

Per provar que una magnitud geomètrica *S* és igual a una altra *Q*. Es construeixen seqüències I_n, C_n tals que:

$$I_n < S < C_n \text{ i } I_n < Q < C_n, \forall n$$

Per a *n* prou gran:

$$C_n - I_n < \varepsilon, \text{per a } \varepsilon > 0$$

Equivalentment:

$$\frac{C_n}{I_n} < \alpha, \text{on } \alpha > 1$$

Per doble reducció a l'absurd es pot arribar a concloure que $S = Q$.

Definició 1, *De les espirals*: Si una línia recta és traçada sobre un pla, i si, restant fix un dels seus extrems, gira un cert nombre de cops amb moviment uniforme, assolint la posició de partida, mentre que, sobre la línia en rotació, un punt es mou uniformement a partir de l'extrem fix, el punt descriurà una espiral sobre el pla.

L'equació de l'espiral en coordenades polars és $r = a\theta$, on a és la velocitat constant del punt sobre la línia (des de l'origen) dividida entre la velocitat angular de rotació de la línia.

Proposició XXIV, *De les espirals*: L'àrea compresa entre l'espiral descrita a la primera revolució i la primera de les rectes en posició inicial de revolució és equivalent a un terç del primer cercle.

$$a(S) = \frac{1}{3} a(C) = \frac{1}{3} \pi (2\pi a)^2$$

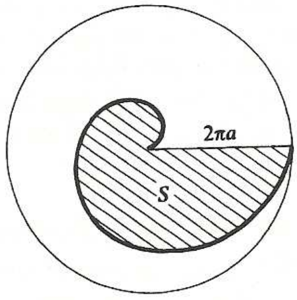


Figure 26

Prova:

- Proposició X + Corol·lari, *De les espirals*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \quad (*)$$

- Proposicions XXI-XXIV, *De les espirals*

Cercle dividit en *n* sectors iguals, *P* una regió de sectors de radis $0, b, \dots, (n-1)b$ i *Q* una regió de sectors de radis $b, 2b, \dots, nb$.

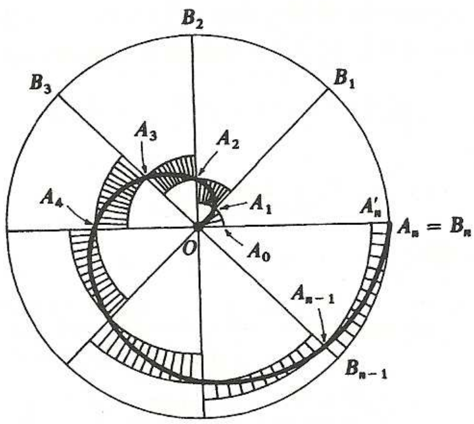


Figure 27

$a(Q) - a(P)$ és l'àrea d'un sector del cercle, que es pot fer tan petit com es vulgui, triant *n* prou gran. Si $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$ i *n* prou gran:

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S)$$

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C)$$

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + (nb)^2}{n(nb)^2} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

Contradicció!! $\cancel{a(S) < \frac{1}{3}a(C)}$

Suposant $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$ i *n* prou gran:

$$a(Q) - a(P) < a(S) - \frac{1}{3}a(C)$$

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C)$$

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

Contradicció!! $\cancel{a(S) > \frac{1}{3}a(C)}$

Per tant: $a(S) = \frac{1}{3}a(C)$, Q. E. D. [com volíem demostrar].

Ars inveniendi versus *ars disserendi*

> …un mètode segons el qual et serà possible abordar la recerca de certes qüestions matemàtiques mitjançant la mecànica... alguns dels [teoremes] que primer se'm van fer palesos per la mecànica, després van ser demostrats per geometria... atès que és més fàcil construir la demostració després d'haver adquirit mitjançant aquest mètode un cert coneixement dels problemes, que buscar-la sense la menor idea al respecte... (carta d'Arquimedes a Eratòstenes, *El Método*, p. 35)

Mètode geomètric per demostrar: exhaustió i doble reducció a l'absurd.

Mètode mecànic per descobrir:

1. Figures com a composició de seccions transversals indivisibles.
2. Equilibri de les seccions d'una figura contra les seccions d'una altra, via la llei de la palanca.

El Mètode descobert el 1899 a la biblioteca d'un monestir grec a Constantinoble, el manuscrit existent més antic, dins del palimpsest. Conté 7 tractats d'Arquimedes. Dos d'ells, l'*Stomakhion* i *El Mètode*, únics. També única versió original en grec dels *Cossos flotants*. La font més important per als diagrames a la sorra d'Arquimedes.

Exemple d'aplicació del *Mètode*: Paràbola.

Quadratures bàsiques … cap al segle XVII

Generalitzant $(*)$ per a qualsevol *k* enter en el XVII s'obté la quadratura bàsica:

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

mitjançant infinitesimals-indivisibles: Cavalieri, Fermat, Roberval, Pascal, Torricelli, Wallis.

Per pensar….

1. Tangent a l'espiral. L'espiral i la trisecció d'un angle.
2. Aproximació d'Arquimedes de π.

Nota: Totes les figures que apareixen en aquest document han estat extretes de Edwards (1979) per a la seva utilització a l'aula.

Referències

ARQUÍMEDES (1986). *El Método*. Int. de Luis Vega. Madrid: Alianza

EDWARDS, C. H. (1979). *The Historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag

GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (1992). *Las Raíces del cálculo infinitesimal en el s. XVII: una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. Nova York: Harper Collins, 2a ed. 1998.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press

VER EECKE, P. (ed.) (1867). *Les Oeuvres complètes d'Archimèdes. Suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon.* Traduïdes del grec al francés amb una introducción i notes per Paul Ver Eecke. Liège : Vaillant-Carmanne, cop. 1960

2. LA TEORIA DELS INDIVISIBLES DE CAVALIERI

Antecedents:

- Circulació de les obres d'Arquimedes i dels *Elements* d'Euclides a l'Europa del XVI → aplicació a problemes de quadratures, cubatures i rectificació.
- Emergència de nous resultats i mètodes de recerca "ràpids", però mètode de demostració d'Arquimedes com a model de rigor i precisió.
- Irracionals es van obrint pas (encara no com a nombres, sinó com magnituds geomètriques).
- Manipulació de conceptes intuïtius relacionats amb l'infinit.
- Kepler (1615): *Nova stereometria doliorum vinariorum*
- Àlgebra simbólica de Viète i Descartes, i mètodes computacionals ☺
- Geometria analítica ☺

→ Emergència de mètodes infinitesimals per resoldre problemes d'àrees, volums i centres de gravetat, amb aritmetització gradual.

Individisibles:

Grégoire de Saint Vincent (1584-1667): 1623 → *Opus geometricum* (1647)

Gilles Personne de Roberval (1602-1675): 1628-1634 → *Traité des indivisibles* (1693)

Bonaventura Cavalieri (1598-1647): *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* ["Geometria dels continus per indivisibles presentada per nous mètodes"] (1635)

Terme “indivisible” associat a Cavalieri però ja utilitzat abans per Thomas Bradwardine (1290-1349) i Galileu Galilei (1564-1642).

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Matemàtic italià, frare jesuat, deixeble i col.laborador de Galileu. Professor de matemàtiques a Bolonya des de 1629

Va presentar un manuscrit sobre indivisibles per obtener la plaça.

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635, 2ª ed. 1653) és el primer treball dedicat als mètodes dels indivisibles. Com a defensa contra les crítiques de Guldin: *Exercitationes geometricae sex* [“Sis exercicis geomètrics”] (1647). Bona acollida però difícils de llegir, llenguatge bàsicament verbal i geomètric → interpretació i comentaris (de Torricelli 1644 ☺ → Wallis ~1650, de Hobbes ☹)

“*Omnes lineae*”… El principi de Cavalieri

Figura plana com a nombre indefinit de rectes paral.leles equidistants, figura sòlida com a conjunt de seccions planes paral.leles equidistants. La *regula* (directriu), la recta (o pla) traçada a través del vèrtex, com a punt de partida. Es mou paral.lelament a ella mateixa fins que coincideix amb una segona recta (o pla), la *tangens opposita*. Les interseccions de la *regula* amb la superfície (o sòlid) original són les *omnes lineae* (els indivisibles), que formaran la totalitat de la figura (*Geometria indivisibilibus*, Llibre II, Definició I).

Com mesurar àrees de figures planes i volums de sòlids tot comparant els indivisibles d'un amb els indivisibles de l'altre. La raó entre els indivisibles de dues figures és igual a la raó entre les figures (àrees o volums) que formen. Prenent aquests indivisibles paral.lels entre si → principi de Cavalieri.

Sigui *P* una figura plana (superficie):

$$omnes\ lineas\ figure = \sum l = P$$

I "tots els quadrats" $\sum l^2$ corresponen a una figura sòlida, etc.

Teorema II, Llibre II, *Geometria indivisibilibus*:

Si $P_1 = P_2$ → $\sum l_1 = \sum l_2$

Teorema III, Llibre II, *Geometria indivisibilibus*:

Si $P_1 \neq P_2$ → $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sum l_1}{\sum l_2}$

A més a més:

- Si P_1, P_2 són dos paral.lelògrams similars, de costats a, b i c, d, respectivament → $\frac{l_1}{l_2} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ → $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sum l_1}{\sum l_2} = \frac{\sum a}{\sum b} = \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2}$
- Si S_1 i S_2 dues figures inscrites en els paral.lelògrams P_1 i P_2, tals que $\frac{l_1}{l_2} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ → $\frac{\sum l_1}{\sum l_2} = \frac{\sum a}{\sum b} = \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$

Teorema IV, Llibre II, *Geometria indivisibilibus* (“el principi de Cavalieri”)

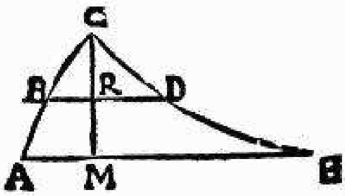
Cavalieri's comparison of areas

from Cavalieri, *Geometria indivisibilibus*, 1635, Book II, Theorem 4, here from the second edition, 1653, 115–116

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI duæ figuræ planæ, vel ſolidæ, in eadem altitudine fuerint conſtitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris ſolidis ductis planis vtcumque inter ſe parallelis, quorum reſpectu prædicta ſumpta ſit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, ſeu ductorum planorum portiones figuris ſolidis interceptas, eſſe magnitudines proportionales, homologis in eadem figura ſemper exiſtentibus, dictæ figuræ erunt inter ſe, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad ſuum conſequens in alia figura eidem correſpondens.

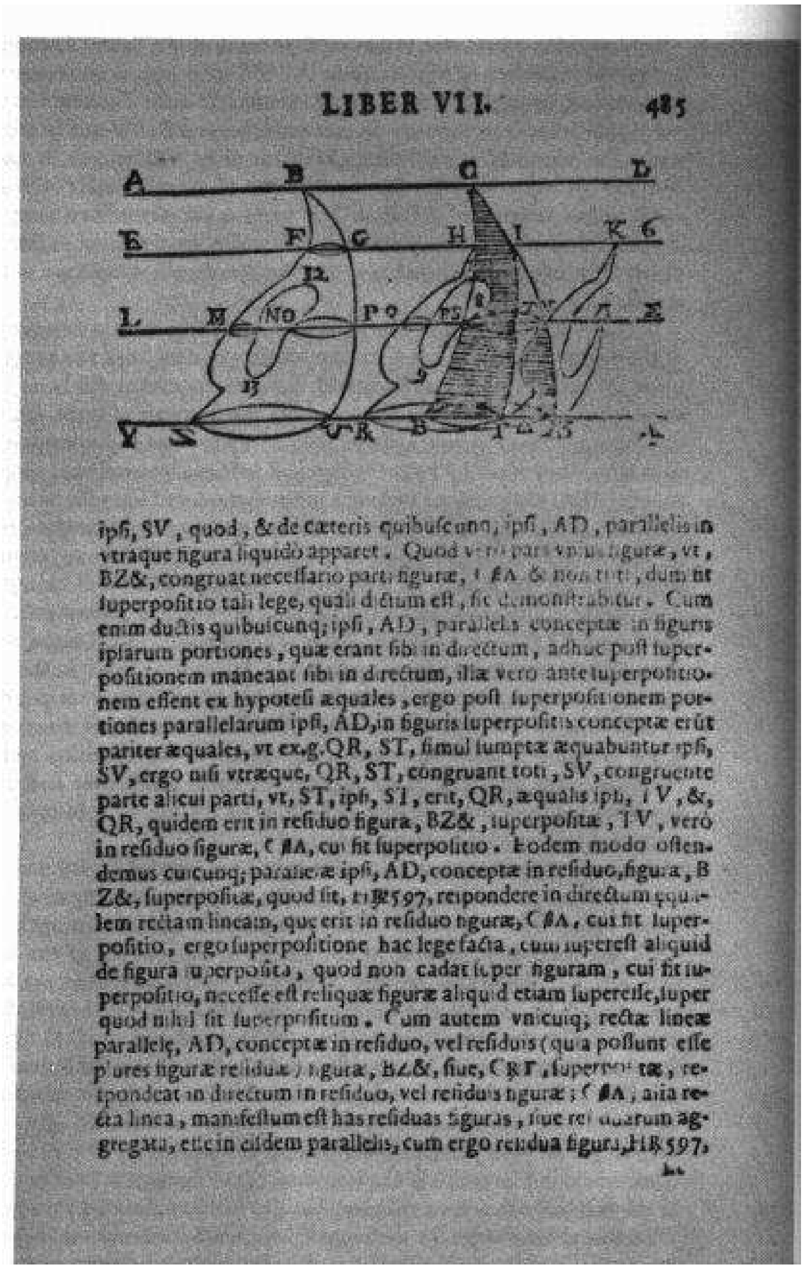
Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine conſtitutæ, C A M, C M E, in quibus duæ vtcunque rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, A E, B D, reſpectu quarum communis altitudo aſſumpta intelligatur, ſint autem portiones figuris interceptæ ipſæ, A M, B R, in fig. C A M, &, M E, R D, in fig. C M E, reperiatur autem, vt, A M, ad, M E, ita eſſe, B R, ad, R D. Dico figuram, C A M, ad figuram, C M E, eſſe vt, A M, ad, M E, vel, B R, ad, R D, quoniam enim, B D, A E, vtcumq; ductæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, patet, quod quælibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, C A M, ſumptæ regula altera ipſarum,



P 2 A M,

Figura 1. Reproducció a Stedall (2009), p. 63.

Considerem dues figures planes, o sòlides, construïdes fins a la mateixa alçada; més encara, prenent línies rectes en els plans, o plans en els sòlids, paral.lels uns als altres, respecte als quals s’agafa l’esmentada alçada, si resulta que els segments de les línies interceptades en les figures planes, o les porcions dels plans interceptats en els sòlids, són quantitats proporcionals, sempre de la mateixa manera en cada figura, aleshores les esmentades figures seran una a l’altra com qualsevol de les primeres a les darreres corresponents a l’altra figura. (…)



LIBER VII. 485

ipsi, SV, quod, & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD, parallelis in vtraque figura liquido apparet. Quod vero pars vnius figuræ, vt, BZ&, congruat necessario parti figuræ, C ßΛ & non toti, dum fit superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum enim ductis quibuscunq; ipsi, AD, parallelis conceptæ in figuris ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post superpositionem maneant sibi in directum, illæ vero ante superpositionem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem portiones parallelarum ipsi, AD, in figuris superpositis conceptæ erũt pariter æquales, vt ex.g. QR, ST, simul sumptæ æquabuntur ipsi, SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &, QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, TV, vero in residuo figuræ, C ßΛ, cui fit superpositio. Eodem modo ostendemus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo, figuræ, BZ&, superpositæ, quod sit, ΠΗ℞597, respondere in directum æqualem rectam lineam, quę erit in residuo figuræ, C ßΛ, cui fit superpositio, ergo superpositione hac lege facta, cum supersit aliquid de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit superpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam superesse, super quod nihil fit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelę, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, C ℞ T, superpositæ, respondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ; C ßΛ, alia recta linea, manifestum est has residuas figuras, siue residuarum aggregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, ΠΗ℞597,

Figura 2. Il.lustració del teorema al llibre VII, reproduïda a Struik (1969), p. 212.

Aplicacions. Quadratura bàsica

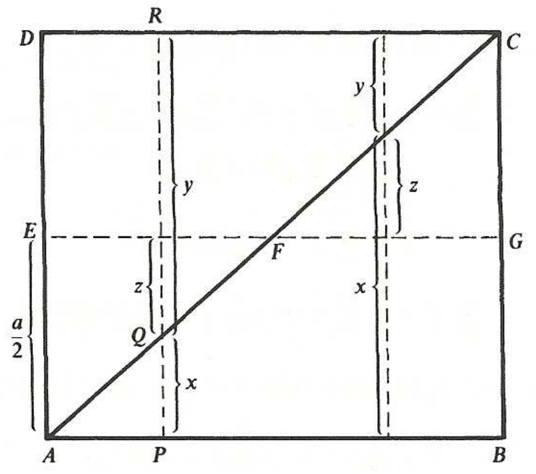


Figura 3. Figura reproduïda a Edwards (1979), p. 107.

En general, per a $n = 2 \div 9$:

$$\frac{\sum x^n}{\sum a^n} = \frac{1}{n+1}$$

Teorema XXIV, Llibre II, *Geometria indivisibilibus* (cas *n* = 2):

> Sigui un paral.lelogram en el qual és dibuixada una diagonal; llavors "tots els quadrats" del paral.lelogram seran el triple de "tots els quadrats" de cadascun dels triangles determinats per la diagonal, quan un dels costats del paral.lelogram és pres com a "regula".

La resta de casos a *Exercitationes geometricae sex.* En termes moderns:

$$a = x + y$$

$$x = \frac{a}{2} + z, y = \frac{a}{2} - z$$

- Cas $\sum x$:

$$\sum a = \sum(x + y) = \sum x + \sum y = 2\sum x \rightarrow \sum x = \frac{1}{2}\sum a \ \left\{= \frac{1}{2}a^2\right\}$$

- Cas $\sum x^2$:

$$\sum a^2 = \sum(x+y)^2 = \sum x^2 + 2\sum xy + \sum y^2 = 2\sum x^2 + 2\sum xy \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\sum x^2 + 2\sum\left(\frac{a^2}{4} - z^2\right) = 2\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum a^2 - 2\sum z^2$$

$$\sum a^2 = 4\sum x^2 - 4\sum z^2 \overset{(**)}{=} 4\sum x^2 - \sum x^2 = 3\sum x^2$$

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}\sum a^2 \;\; \left\{= \frac{1}{3}a^3\right\}$$

$(*)\sum xy = \sum\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \sum\left(\frac{a^2}{4} - z^2\right)$

$(**)\ \sum z^2 = 2\frac{1}{8}\sum x^2$, per semblança de triangles, les dimensions del triangle petit *CEG* són la meitat de les dimensions del triangle gran *ABC*.

Exercici 1: Proposició XXI, *Exercitationes geometricae sex*, part IV

Cas $\sum x^3$, interpretació:

$$\sum(x+y)^3 = 2\sum x^3 + 6\sum x^2 y = \sum a^3$$

$$\sum a^3 = a\sum a^2 = a\left(2\sum x^2 + 2\sum xy\right) = \frac{2}{3}\sum a^3 + 2\sum axy = \cdots = \frac{2}{3}\sum a^3 + 4\sum x^2 y$$

Exercici 2: Expandir $\sum x^4 = \sum(x+y)^4$ per arribar al resultat $\sum x^4 = \frac{1}{5}\sum a^4 \left\{= \frac{1}{5}a^5\right\}$

Referències

BARON, M. E. (1969). *The origins of the infinitesimal calculus*. Oxford [etc.]: Pergamon Press

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag

MASSA-ESTEVE, M. R. (1994). El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 9, pp. 68-100.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press

STRUIK, D. J. (ed.) (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1a ed., 1969] .

3. EL MÈTODE D'*ADIGUALACIÓ* DE FERMAT

Antecedents

La geometria analítica (primera meitat s. XVII) obre la possibilitat de contruir tot tipus de corbes i sòlids → nous exemples per buscar màxims i mínims, construir tangents i calcular àrees i volums.

Quantitats relacionades amb la corba: abscissa, ordenada, arc, subtangent, tangent, normal, subnormal. Corbes definides a partir de la relació de dues quantitats variables.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Jurista de Toulouse, gairebé no visita Paris però gràcies a Marin Mersenne* (1588-1648) intercanvis amb Gilles Personne de Roberval (1602-1675) i René Descartes (1596-1650).

* França, primera meitat s. XVII: activitat matemàtica intensa però poques "publicacions". Mersenne organitza reunions erudites a Paris. Facilita contactes per correspondència (Galileu, Cavalieri i Torricelli amb Roberval, Fermat i Descartes). Fa circular manuscrits. Proposa problemes. Per exemple, en relació al lloc geomètric d'un punt sobre la vora d'una roda que gira (Roberval i la cicloide).

Treballs de Fermat:

1628-1630: *Dels llocs plans i sòlids*.

1629-1644: Màxims i mínims, tangents, mètode d'adigualació.

1635: Teorema darrer o gran.

1640: Teorema petit.

1654: Probabilitat (relació amb Pascal).

1659: Rectificació de corbes.

1661-1662: Anàlisi-síntesi de la llei de refracció (controvèrsia amb Descartes ja al 1637).

➔ "Príncep dels amateurs" (?)

Fermat i Descartes seran dels primers en aplicar l'àlgebra de Cardano, Bombelli i Viète a la geometria dels Grecs. Descartes a partir de corba com a lloc geomètric deriva equació, Fermat parteix de l'equació algèbrica per deduir-ne les propietats geomètriques.

1. *Mètode per a la recerca dels màxims i els mínims i de les tangents a les línies corbes* (1629-1636)

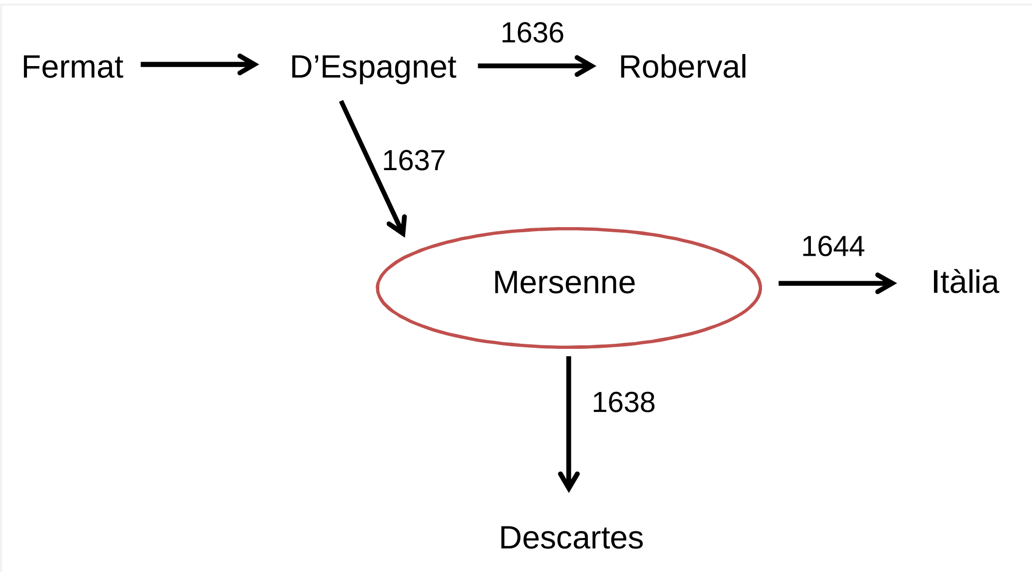
Kepler (1615). *Nova stereometria doliorum vinariorum*: "Prop d'un màxim, els decrements a ambdós costats són inicialment imperceptibles."

Fermat transforma la idea de Kepler en un algorisme, a partir del treball de Viète sobre la relació entre els coeficients i les arrels d'un polinomi.

Fonts d'inspiració de Fermat: els *Elements* d'Euclides, les *Còniques* d'Apol.loni, les *Obres* d'Arquimedes, l'*Aritmètica* de Diofant, la *Col.lecció Matemàtica* de Pappos, l'*Art analítica* de Viète.

Introdueix la tècnica d'*adigualació*. A la segona part aplica el mètode de màxims i mínims per a trobar la tangent a la paràbola.

El manuscrit original es va perdre però *circulació de còpies*:



Publicat per primer cop el 1679, a l'obra pòstuma *Varia opera*.

Com es pot dividir per una cosa que després es considera nul.la?

Mètode per a la recerca de màxims i mínims[375]

Tota la doctrina de la recerca de màxims i mínims es basa en aquesta proposició única.

Sigui a una incògnita arbitrària del problema (que pot tenir una, dues o tres dimensions, segons convingui a allò que es proposa).

S'expressa la quantitat màxima o mínima en termes de a, els quals poden estar afectats de graus diversos.

Seguidament a se substitueix per $a + e$ i aleshores la quantitat màxima o mínima ve expressada en termes que contenen a i e, afectats de graus diversos.

Ara, parlant com Diofant, *adigualem*[376] les dues expressions del màxim o mínim, i simplifiquem els termes que els són comuns.[377]

Un cop hàgim fet això, tindrem que tots els termes contindran e, o e afectat d'algun grau.[378]

Tot seguit, ho dividim tot per e, o per e afectat d'un grau convenient per tal que un dels membres quedi net de e.

Suprimim ara tots els termes que encara contenen el terme e o alguna de les seves potències.

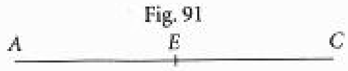
Finalment, igualem un terme amb l'altre i, en el cas que un dels dos sigui nul, igualem els termes positius i els termes negatius.[379]

La resolució d'aquesta darrera equació dóna el valor de b que proporcionarà el valor màxim o mínim, un cop el substituïm en l'expressió inicial.

Considerem un exemple:

Dividim la recta AC en E de manera que el rectangle AEC sigui màxim [figura 91].[380]

Fig. 91



La recta AC l'anomeno b. Una de les parts de b l'anomenem a. L'altra serà òbviament $b - a$ i el rectangle que formen ambdós segments serà

$$ba - a^2,$$

que és la quantitat que volem que sigui màxima.

Per trobar-la, fem la part a igual a $a + e$; l'altra part és $b - a - e$, i el rectangle que formen aquests dos segments és

$$ba - a^2 + be - 2ae - e^2$$

que adigualem a $ba - a^2$.

Simplificats els termes comuns, s'obté

$$be \cong 2ae + e^2.$$

Ho dividim tot per e,

$$b \cong 2a + e.$$

I ara, eliminant e, resulta que

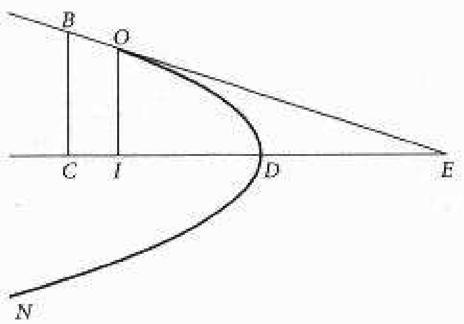
$$b = 2a.$$ [381]

Per tant, per resoldre el problema, cal dividir el segment b per la meitat. No és possible donar un mètode més general.[382]

De les tangents a les línies corbes

Suposem, per exemple, una paràbola BDN donada de vèrtex D i diàmetre DC. Considerem un punt donat B de la paràbola, al qual tirem la recta BE, tangent a la paràbola, la qual talla el diàmetre en el punt E [figura 92].

Fig. 92



Si agafem un punt qualsevol de la recta BE, i considerem l'ordenada OI i també l'ordenada BC del punt B, tindrem la desigualtat entre les proporcions

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2},$$

atès que el punt O és exterior a la paràbola.[385] Ara bé, a causa de la semblança dels triangles,

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}.$$

Per tant,

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}.$$ [386]

El punt B està donat;[387] per tant, ho està també l'ordenada BC i, consegüentment, el punt C. Per tant, CD està donat.

Sigui, doncs, igual a una quantitat donada d, i fem CE igual a a i CI igual a e. Aleshores tenim que

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

Multipliquem mitjos i extrems,

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

D'acord amb el mètode precedent adigualem.[388]

Un cop simplificats els termes comuns tindrem:

$$de^2 - 2dae \cong -a^2e$$

que és el mateix que

$$de^2 + a^2e \cong 2dae.$$

Si ho dividim tot per e tindrem:

$$de + a^2 \cong 2da.$$

Eliminem de. Queda $a^2 = 2da$ i, per tant, $a = 2d$.

Hem establert d'aquesta manera que CE és el doble de CD, i això és correcte.

Aquest mètode no falla mai i es pot aplicar a moltes qüestions molt boniques. Fent-lo servir hem trobat els centres de gravetat de figures limitades per línies rectes i corbes,[389] i moltes altres qüestions, que tractarem en un altre indret quan disposi de temps.[390]

Pel que fa a la quadratura de superfícies limitades per línies rectes i corbes, i la relació que tenen amb els cons de la mateixa base i alçada, ho he tractat ja àmpliament amb monsieur de Roberval.[391]

2. *La recerca analítica del mètode de màxims i mínims* (1640?)

Intent de justificació del mètode com a defensa a les crítiques de Descartes, es basa en el mètode de Syncrisis de Viète, estableix els fonaments teòrics del seu mètode.

A més de la cissoide i la concoide, aplica el mètode d'adigualació a corbes transcendents (com la cicloide i la quadratriu).

> La teoria de les tangents és una conseqüència del mètode de determinació de màxims i mínims, que permet de resoldre amb molta facilitat totes les qüestions del límit i, d'una manera particular, els famosos problemes en què, segons diu Pappos en el prefaci del llibre VII, les qüestions límits són difícils.
>
> Les línies corbes a les quals hem determinat les tangents tenen unes propietats específiques que es poden expresar o bé simplement per línies rectes, o bé per mitjà de corbes tan complicades com vulguem amb rectes o altres corbes.
>
> Hem satisfet el primer cas usant la nostra regla, que, en ésser massa concisa, pot haver resultat difícil, però que tot i això ha estat reconeguda legítima.
>
> De fet, en el pla, considerem corbes arbitràries expressades per dues posicions donades, una de les quals la podem anomenar *diàmetre*, i l'altra, *ordenada* [applicata]. Aleshores considerem la tangent en un punt donat de la corba ja construïda i, *per adigualació*, considerem la propietat específica de la corba, no ja sobre la corba sinó sobre la tangent que busquem.
>
> Eliminem, d'acord amb la doctrina dels màxims i els mínims, els termes que calgui, i arribem a una igualtat que permet determinar el punt de tall de la tangent amb el diàmetre i, per tant, la pròpia tangent.

***Mètode del màxim i el mínim*[428]**

Analitzant el mètode de la *sincresi* i de l'*anastrofa*[429] de Viète, i explorant acuradament la seva aplicació a la recerca de la constitució de les equacions correlatives, em va venir a l'esperit la manera de derivar-ne un procediment per trobar els màxims i els mínims i per determinar així, amb facilitat, totes les dificultats relatives a les condicions (διορισμον) que tantes dificultats han procurat als geòmetres antics i moderns.

Com ja va dir Pappos, i com sabien els antics, els màxims i els mínims són únics i singulars, malgrat que Commandino afirmi no entendre el significat que, en Pappos, té el terme μοναγοζ ('singular').[430] D'això se'n segueix que, a un costat i a l'altre del punt que determina el límit,[431] podem considerar una equació ambigua i, dels dos punts, un de cada banda, s'obtenen dues equacions ambigües correlacionades, iguals i semblants.

Per exemple, se'ns proposa:

Dividir la recta b de manera que el rectangle que s'obtingui amb els segments sigui màxim.[432]

El punt que satisfà la qüestió és precisament el que biseca la recta donada i s'obté que el rectangle màxim és igual a la quarta part de b^2. Cap altra divisió de la recta donada no proporciona un producte igual a la quarta part de b^2.[433]

En canvi, si se'ns proposa:

Dividir la recta b en dues parts de manera que l'àrea del rectangle que generen els segments sigui igual a z pla (on aquesta àrea és més petita que $\frac{b^2}{4}$ *),*

aleshores hi ha dos punts que satisfan la qüestió, i es troben a una banda i a l'altra del punt que proporciona el rectangle màxim.

Si, en efecte, a és un dels segments de la recta b, tindrem que $ba - a^2 = z^{pl}$, que és una equació ambigua perquè la recta pot trobar-se a un dels costats, tal com hem explicat. Sigui, doncs, $be - e^2 = z^{pl}$ l'equació correlativa. Comparem les dues equacions seguint el mètode de Viète:

$$ba - a^2 = be - e^2.$$

Dividim-ho tot per $a - e$, i obtindrem:

$$b = a + e,$$

on a i e són diferents.

Si, en lloc del valor z^{pl}, n'agafem un de més gran, però, en tot cas, més petit que $\frac{1}{4}b^2$, aleshores les rectes a i e diferiran entre elles menys que no pas les anteriors,[434] i els punts de divisió s'aproximen més al punt que determina el rectangle màxim com més disminueixi la diferència entre ells, fins que, en assolir la divisió última, que correspon al rectangle màxim, aquesta diferència s'esvaeixi. En aquest cas hi ha μοναγη, o sigui una solució mínima, i les dues quantitats s'igualen. És a dir, a és igual a e.

De tot això en resulta que, si fem a igual a e en el valor $b = a + e$, obtingut amb el mètode de Viète aplicat a les dues equacions correlatives anteriorment establertes (situació que s'esdevé sempre que el punt correspon al màxim o mínim), tindrem, en el cas proposat,

$$b = 2a.$$

És a dir, quan la recta es divideix per la meitat, el rectangle format pels dos segments és màxim.

Considerem un altre exemple:

Exercici 1:

Dividim la recta b en dues parts de manera que el sòlid que s'obté amb el quadrat d'un d'ells i l'altre sigui màxim.[435]

Fem un dels segments igual a a. Volem que

$$ba^2 - a^3$$

sigui màxim.[436]

L'equació correlativa i semblant és:

$$be^2 - e^3.$$

Comparant-les d'acord amb el mètode de Viète obtenim:

$$ba^2 - be^2 = a^3 - e^3,$$

que dividides entre $a - e$ es converteixen en

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

que és la que proporciona la constitució de les equacions correlacionades.

Per trobar el màxim fem $e = a$ i obtenim:

$$2ba = 3a^2$$

o sigui,

$$2b = 3a$$

i el problema està resolt.

Tanmateix, atès que, a la pràctica, les divisions per un binomi són força complicades i molt intricades, és preferible, a l'hora de comparar les equacions correlatives, posar de manifest les diferències que hi ha entre les arrels, de manera que no s'hagi de fer cap altra cosa que una simple divisió per aquesta diferència.[437]

Volem que

$$b^2a - a^3$$

sigui màxim.[438] D'acord amb el mètode esmentat abans, caldria prendre com a equació correlativa $b^2e - e^3$. Ara bé, atès que e, a l'igual de a, és una *incògnita*, res no impedeix que la designem $a + e$. Aleshores tindrem:

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

És clar que, si suprimim els termes que són iguals, tots els que quedin estaran afectats de la incògnita e, trobant-se els termes que contenen a en una i altra. Així,

$$b^2e = e^3 + 3e^2a + 3a^2e,$$

i, després de simplificar-los tot per e, tenim:

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae,$$

que dóna la constitució de les dues equacions correlatives d'aquesta forma.

Per trobar el màxim cal igualar les arrels de les dues equacions per tal de satisfer les regles del primer mètode, d'on se'n segueix la forma de procedir i d'operar.

Cal fer a igual a $a + e$. D'on resulta $e = 0$. Però, aleshores, d'acord amb la forma que hem vist que tenen les equacions correlatives, b^2 és igual a:

$$e^2 + 3a^2 + 3ae$$

Hem de suprimir, d'aquesta igualtat, tots els termes que estiguin afectats per *e*, tot reduint-los a zero. En resultarà:

$$b^2 = 3a^2,$$

que és l'equació que dóna el màxim del sòlid proposat.

Per mostrar més plenament que l'ús del nostre mètode és general, considerem nous gèneres d'equacions correlatives que Viète no ha tractat i que hem extret del llibre d'Apol·loni, les *seccions determinades* (en Pappos, llibre VII, prop. 61),[439] la determinació de les quals, segons reconeix el mateix Pappos, és difícil.

Considerem la recta BDEF, de la qual es donen els punts B, D, E, F [figura 97]. *Cal trobar entre els punts D i E un punt N tal que el rectangle BNF i el rectangle DNE tinguin raó mínima.*[440]

Fig. 97

Fem la recta $DE = b$, $DF = z$, $BD = d$ i $DN = a$. Aleshores, volem que la raó

$$\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$$

sigui mínima.

La raó correlacionada, d'acord amb el primer dels nostres mètodes, és:

$$\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}.$$

Igualem ara el producte dels termes mitjos amb el dels extrems. Tindrem:

$$dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2 =$$
$$dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2.$$

Suprimint els termes semblants i fent les transposicions necessàries, tenim:

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2.$$

…

3. *Apèndix al mètode de màxims i mínims* (1644)

Millora d'un mètode de Viète amb ampliació dels problemes d'aplicació.

Exercici 2:

Apèndix al mètode del màxim i el mínim[446]

En moltes ocasions, en el decurs de les qüestions, intervenen radicals.[447] L'analista no ha de dubtar d'usar una tercera incògnita i d'altres, si cal.[448] Així evitarà les potències que, quan es repeteixen, compliquen normalment els càlculs. L'artifici del mètode quedarà explicat en els exemples següents:

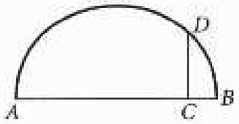
Considerem un semicercle de diàmetre AB, amb la perpendicular DC al diàmetre [figura 98]. *Es demana el màxim de la suma* $AC + CD$.

Sigui b el diàmetre. Fem $AC = a$. Tindrem que $CD = \sqrt{ba - a^2}$.[449] Es demana el màxim de la quantitat

$$a + \sqrt{ba - a^2}.$$

Aplicant les regles del mètode, les equacions que haurem d'*adigualar* seran massa elevades.[450] Fem la quantitat màxima igual a o. Per què hauríem d'abandonar el mètode de Viète segons el qual les quantitats variables s'expressen per mitjà de vocals?[451]

Fig. 98



Tindrem, doncs,

$$o = a + \sqrt{ba - a^2}.$$

I, per tant,

$$CD = \sqrt{ba - a^2},$$

que elevada al quadrat dóna:

$$o^2 + a^2 - 2ao = ba - a^2.$$

Un cop fet això, hem de realitzar les transformacions necessàries per tal que el terme afectat de l'exponent més alt estigui sol. Aleshores, podrem trobar el màxim, que és la finalitat d'aquest artifici. Fetes les transformacions, tenim que

$$ba - 2a^2 + 2ao = o^2.$$

Ara bé, per hipòtesi, o és la quantitat màxima i, per tant, o^2, quadrat d'una quantitat màxima, també serà màxima. En conseqüència,

$$ba - 2a^2 + 2ao$$

(que és l'expressió que és igual a o^2) ha de ser màxima.[452]

Aquesta expressió no té cap radical. Tractem-la, segons el mètode, com si o^2 fos una quantitat variable. Per adigualació tindrem que

$$ba - 2a^2 + 2oa \cong ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2oa + 2oe.$$

Suprimim els termes comuns i la resta la dividim per e:

$$b + 2o \cong 2e + 4a.$$

Anul·lem, d'acord amb el mètode, $2e$. Tindrem:

$$b + 2o = 4a,$$

o sigui,

$$4a - b = 2o, \text{ o sigui } 2a - \frac{1}{2}b = o.$$

Aquesta darrera igualtat s'ha obtingut aplicant el mètode.[453] Ara hem de tornar a la primera equació, segons la qual

$$a + \sqrt{ba - a^2} = o.$$

Però hem trobat que $o = 2a - \frac{1}{2}b$. En conseqüència,

$$2a - \frac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}.$$

D'on resulta: $a - \frac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}$. Elevem-ho tot al quadrat:

$$a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ba = ba - a^2$$

d'on finalment s'obté:

$$ba - a^2 = \frac{1}{8}b^2.$$

I d'aquesta darrera equació en traiem el valor de a que correspon al màxim buscat.[454]

Exercici 3: Apliqueu el mètode de Fermat per mostrar que la sub-tangent de $y = x^2$ és $s = \frac{x}{2}$, de manera que el pendent de la tangent és $2x$.

Nota: Tots els fragments dels treballs de Fermat que apareixen en aquest document s'han extret de Pla, Viader i Paradís (2008) per a la seva utilització a l'aula.

Referències

MAHONEY, M. S. (1994). *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1ª ed., 1973]

PLA, J., VIADER, P., PARADÍS, J. (2008). *Pierre de Fermat. Obra Matemàtica vària*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press

STRUIK, D. J. (ed.) (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1a ed., 1969]

ALTRES CONSTRUCCIONS DE TANGENTS

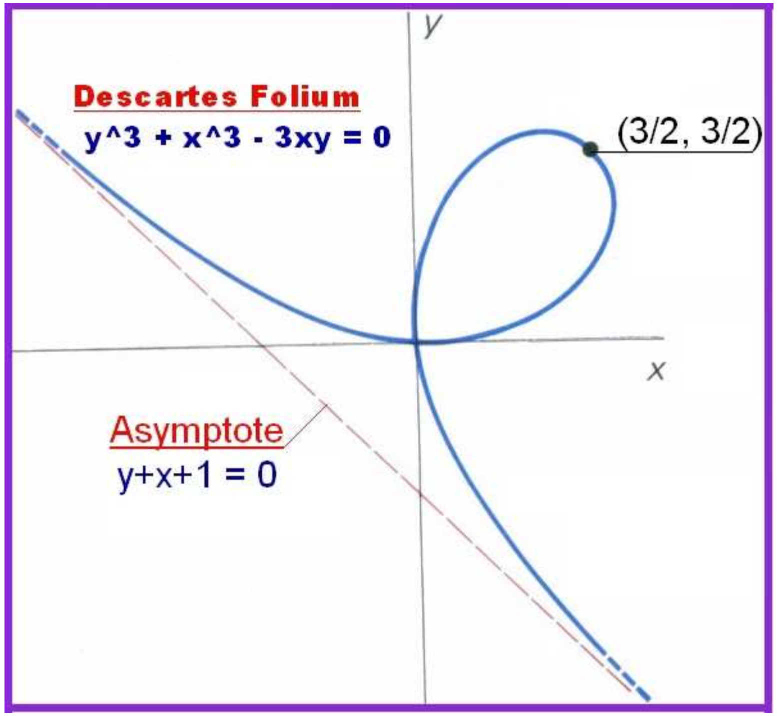
1. MÈTODE DEL CERCLE DE DESCARTES

La Géométrie (1637):

1) assignació de lletres a les longituds (variables i constants) d'un diagrama;
2) aplicació de l'àlgebra per trobar l'equació del lloc geomètric;
3) no restricció dimensional;
4) jerarquia de corbes;
5) associació de les arrels d'equacions amb els punts d'intersecció de corbes;
6) regla dels signes (nombre d'arrels positives ≤ nombre de canvis de signe dels coeficients);
7) corbes mecàniques com aquelles que no es poden definir per una equació polinòmica.

Àlgebra auxiliar de la geometria.

Controvèrsia Fermat-Descartes: Descartes considera que el mètode de Fermat només va bé a l'exemple particular de la paràbola. Formació d'una equació aproximada, amb termes que s'eliminen. Descartes creu que el seu mètode és més útil i més general, el mètode de Fermat depèn de la relació explícita entre abscissa i ordenada. Repte: tangent al *fòlium de Descartes*.



Una altra discussió: la llei de la refracció.

Qüestió d'interès als segles XV-XVI:

Snell (1581-1626),

Huygens (1629-1695),

Descartes (a la *Dioptrique*, annex a la *Géométrie*),

Fermat

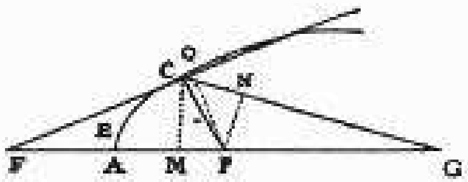
i abans al món àrab: Alhazen (965-1039).

gui exacte i segur. Malgrat això, atès que en aquestes construccions només usem les cordes per determinar línies rectes de les quals en coneixem perfectament la longitud, no s'han pas de rebutjar.[98]

Quan coneixem la raó existent entre els punts d'una línia corba i els d'una recta[99] en la forma que acabo d'exposar, és fàcil de trobar també la raó que hi ha amb tots els altres punts i rectes donats; i així serà fàcil trobar els diàmetres, eixos, centres i altres línies, o punts, amb els quals la corba tingui una relació més particular o més simple que amb els altres. I així imaginar diverses maneres de descriure-les i de trobar-ne les més fàcils. Podrem també, amb aquest mètode, trobar gairebé tot allò que pot ser determinat respecte de les àrees, sense que facin falta més explicacions de la meva banda.[100] I finalment, totes aquelles propietats que podem atribuir a les línies corbes, i que solament depenen dels angles que formen amb d'altres línies. Però, quan es puguin fer línies rectes que les tallin segons angles rectes en els punts en què es tallen amb les que formen amb elles els angles que volem determinar o bé, la qual cosa em sembla que és la mateixa, on tallen les seves contingents,[101] la mesura d'aquests angles no és pas més difícil de calcular que si els angles estiguessin formats per dues línies rectes. És per aquesta raó que crec que hauré donat tot allò que cal per establir els elements de les línies corbes, tan bon punt hagi donat la manera general de tirar línies rectes que formin angles rectes en [**342**] els punts [de les corbes] que s'elegeixin.

Per trobar les propietats de les línies corbes, és suficient conèixer la raó existent entre els seus punts i els de les línies rectes i la manera de tirar altres línies que les tallin en tots aquests punts en angles rectes.

AT, VI, 413



Goso afirmar que aquest és el problema més útil i general, no només d'entre els que conec, sinó, fins i tot, d'entre els que mai havia desitjat conèixer dins la geometria.[102]

Procediment general per trobar línies rectes que tallin les corbes, o les seves contingents, segons angles rectes. AT, VI, 414

Sigui *CE* una línia corba a la qual desitgem tirar una recta per *C* que formi amb ella angles rectes. Considero la qüestió ja resolta, i que la línia buscada és la recta *CP*, la qual perllongo fins al punt *P*, en què troba la línia recta *GA*, que suposo que és la recta, als punts de la qual referim tots els de la línia *CE*.[103]

De manera que fent MA o $CB = y$, CM o $BA = x$,[104] tinc una equació que explica la relació que hi ha entre x i y.[105] A continuació faig $PC = s$, $PA = v$, o $PM = v - y$. Ara, mitjançant el triangle rectangle *PMC*, puc calcular ss, que és el quadrat de la base, en la forma

$$xx + vv - 2vy + yy,$$

que és la suma dels quadrats dels dos costats.[106]

És a dir, tinc que

$$x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}\text{, o bé } y = v + \sqrt{ss - xx}\,.$$

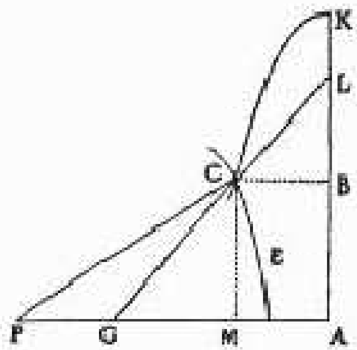
Per mitjà d'aquesta equació, elimino una de les dues quantitats indeterminades, la x o la y, en l'equació que estableix la raó que hi ha entre tots els punts de la corba *CE* amb els de la recta *GA*. Això és fàcil posant $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ arreu en el lloc de x, i el quadrat d'aquesta suma en el lloc de xx, i el seu cub en lloc de x^3, i així amb els altres termes, si és x el que volem substituir. O bé, **[343]** en el cas que sigui y col·locant en el seu lloc $v+\sqrt{ss-xx}$,[107] i el quadrat, el cub, etc. d'aquesta suma en el lloc de yy, de y^3, etc. De manera que, un cop ho haguem fet, quedi, en tot cas, una equació en què només hi hagi una de les quantitats indeterminades x, o y.[108]

Així, si CE és una el·lipse, MA és el segment del seu diàmetre, damunt el qual s'aplica en ordre CM, r el seu costat recte i q l'eix transversal, aleshores pel teorema 13 del llibre primer AT, VI, 415

d'Apol·loni,[109] tenim que $xx=ry-\frac{r}{q}yy$, de la qual, reemplaçant xx, obtenim $ss-vv+2vy-yy=ry-\frac{r}{q}yy$ o bé $yy\frac{+qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$ igual a res.

En aquest cas, és preferible considerar tota la suma junta, que no pas fer una part igual a l'altra.[110]

De la mateixa manera, si CE és la línia corba que s'obté movent una paràbola de la forma que hem descrit amb anterioritat,[111] i si fem b igual a GA, c igual a KL, i d igual al costat recte del diàmetre KL de la paràbola, aleshores l'equació que ens dóna la relació **[344]** entre x i y, és



$$y^3-byy-cdy+bcd+dxy=0$$

Si ara reemplacem x, obtindrem

$$y^3-byy-cdy+bcd+dy\sqrt{ss-vv+2vy-yy}=0\,.$$[112]

Si ara, en el quadrat de *CM*, substituïm y per aquesta suma, trobem que s'expressa en la forma AT, VI, 417

$$\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy.$$ [116]

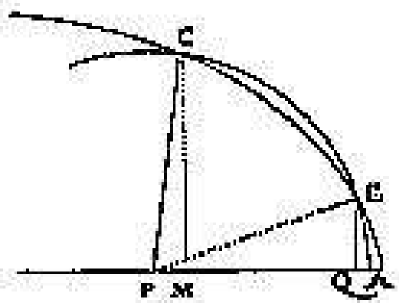
Però, si suposem que la línia recta *PC* talla la corba en *C* segons angles rectes[117] i, com abans, fem $PC = s$ i $PA = v$, aleshores *PM* serà $v - y$, i atès que el triangle *PCM* és rectangle, tindrem $ss - vv + 2vy - yy$ com a quadrat de *CM*, o bé obtindrem, un cop haguem substituït y per la suma a la qual és igual,

$$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddzz + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0,$$

que és l'equació buscada.[118]

Un cop s'ha trobat una tal equació, en lloc de fer-la servir per determinar les quantitats x, y, o z, que ja són conegudes, atès que el punt *C* és donat, l'hem fet servir per trobar v o s, que determinen el punt *P*, que és el

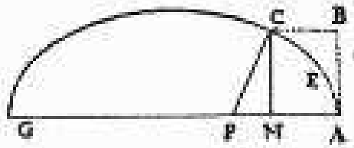
punt que es demana.[119] I, per aconseguir-ho, cal considerar que si el punt *P* és el punt que desitgem trobar, la circumferència que el té com a centre, i que passa per *C*, tocarà la línia corba *CE* sense tallar-la;[120] però si aquest punt es troba més proper o més allunyat, encara que sigui poc, del punt [**346**] *A* d'allò que cal, la circumferència tallarà la corba, no només[121] en el punt *C*, sinó també necessàriament en un altre punt. Així doncs, cal considerar que si aquest cercle talla la línia corba *CE*, l'equació per mitjà de la qual cerquem la quantitat *x*, *y*, o qualsevol altra de semblant, suposant conegudes *PA* i *PC*, conté necessàriament dues rels desiguals.[122] Així, per
AT, VI, 418 exemple, si aquesta circumferència talla la corba en dos punts *C* i *E*, tirem *EQ* paral·lela a *CM*. Els noms de les quantitats indeterminades, *x* i *y*, convindran per igual a les línies *EQ*, i *QA*, i a les línies *CM*, i *MA*.



Donat que *PE* és igual a *PC*, puix que són dos radis d'una mateixa circumferència, quan cerquem les línies *EQ*, i *QA*, usant *PC*, i *PA*, que suposem conegudes, obtenim la mateixa equació que si busquem *CM*, i *MA*, usant *PC*, i *PA*. De tot això se segueix evidentment que els valors de *x*, de *y*, o de qualsevol altra quantitat que s'hagi suposat haurà de ser doble en aquesta equació, és a dir, l'equació haurà d'admetre necessàriament dues rels diferents.[123]

Si el valor que busquem és el de x, una de les rels serà CM, i l'altra, EQ, però si és el de y, l'una serà MA, i l'altra serà QA, i així en altres casos. És ben cert que, si el punt E no es troba en el mateix costat de la corba que el punt C, només una d'aquestes dues rels serà vertadera; l'altra serà oposada o menys que no-res.[124] Però, com més pròxims siguin els punts C i E, més petita serà la diferència entre ambdues rels; [347] i seran completament iguals quan els dos punts coincideixen, és a dir, quan la circumferència que passa per C toqui la corba CE, però no la talli.

A més, cal considerar que quan una equació té dues rels iguals, necessàriament és de la mateixa forma que si es multiplica per si mateixa la quantitat que hem suposat desconeguda menys la quantitat coneguda a la qual és igual, i si aquesta expressió té dimensió inferior a la de l'equació precedent, cal multiplicar-la encara per una altra suma que tingui tanta dimensió com la que li falta, per tal de poder disposar d'una equació separada per a cada AT, VI, 419
un dels termes de l'una i de l'altra.[125]



Per exemple, afirmo que la primera equació trobada més amunt, això és

$$yy\frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q-r},$$

ha de tenir la mateixa forma que l'expressió que s'obté fent e igual a y, i multplicant $y - e$ per ella mateixa. S'obté $yy - 2ey + ee$, de manera que podem comparar per separat cada un dels seus termes respectius i dir que el primer, que és yy, és idèntic en l'una i en l'altra; el segon, que en una expressió és

$$\frac{qry - 2qvy}{q-r},$$

és igual al segon de l'altra expressió, que és $-2ey$.

Si ara busquem la quantitat v, que és la que correspon a la línia PA, resulta que $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, o bé, atès que hem suposat que e és igual a y, a

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r.$$

Nota: Tots els fragments dels treballs de Descartes que apareixen en aquest document s'han extret de Pla i Viader (1999) per a la seva utilització a l'aula.

Regles de Hudde i Sluse

Primers algorismes de construcció de corbes algebraiques, de manera rutinària, sense recórrer a construccions adaptades a cada corba en particular (1650s).

Jan Hudde (Amsterdam, 1628-1704)

De l'escola de Van Schooten a Leiden, que afavoreix desenvolupament de la geometria cartesiana en els 1650s. Van Schooten: traducció llatina de *La Géométrie* el 1649.

René F. Sluse (Liège, 1622-1685)

Correspondència amb Huygens, Pascal i Wallis.

REGLA DE HUDDE

Si dues arrels d’una equació són iguals, i es multiplica per una progressió aritmètica qualsevol; és a dir, el primer terme de l’equació pel primer terme de la progressió, el segon terme de l’equació pel segon terme de la progressió, etc, dic que el producte serà una equació en la qual les arrels esmentades tornen a aparèixer.

REGLA DE HUDDE

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (a + ib) x^i$$

Si *e* és arrel doble de *F*(*x*) aleshores és arrel de *F**(*x*).

<u>Dem</u>:

$$F(x) = (x-e)^2 \sum c_i x^i = \sum c_i (x^{i+2} - 2ex^{i+1} + e^2 x^i)$$

Sigui:

$$A_i = a + bi$$

$$F^*(x) = \sum c_i (A_{i+2} x^{i+2} - 2eA_{i+1} x^{i+1} + e^2 A_i x^i)$$

$$= \sum c_i [(A_i + 2b)x^2 - 2e(A_i + b)x \quad + e^2 A_i] x^i$$

$$= \sum c_i [A_i (x-e)^2 + 2bx(x-e)] x^i$$

REGLA DE SLUSE

La *regla de Sluse* per a corbes algebraiques donades de forma <u>implícita</u>:

$$f(x,y) = \sum c_{ij}\, x^i y^j = 0 \qquad f_x^*(x,y) = \sum (a+bi) c_{ij}\, x^i y^j \qquad f_y^*(x,y) = \sum (a+bj) c_{ij}\, x^i y^j$$

Si *m* és el pendent de la recta tangent a la corba *f*(*x*,*y*)=0 en el punt (*x*,*y*):

$$m = -\frac{y}{x} \cdot \frac{f_x^*}{f_y^*}$$

2. TANGENT I COMPOSICIÓ DE MOVIMENTS

1630s-1640s: concepte de moviment instantani desenvolupat per:

Evangelista Torricelli (1608-1647),

Giles P. de Roberval (1602-1675)

Membre fundador de l'Académie de Sciences de Paris (1666).

1603: Accademia dei Lincei de Roma

1645: Royal Society de Londres

1666: Académie des Sciences de Paris

Jorge Juan (1713-1773)

1734: participa a l'expedició organitzada per l'Académie des Sciences per mesurar 1 grau del meridià.

1749: *Fellow* de la Royal Society.

ROBERVAL I LA TANGENT A LA CICLOIDE

Corba com el camí que segueix un punt mòbil.

Tangent com la línia del moviment instantani del punt mòbil.

Moviment del punt generador com a resultat de la combinació de dos moviments simples, aleshores el moviment instantani es pot determinar a partir de la composició dels moviments (llei del paral.lelogram).

Determinació de la tangent a la cicloide!!!

http://www.geogebra.org/en/upload/files/piman/my_byke.html

Coordenades: $x = a(t - \sin t)$

$$y = a(1 - \cos t)$$

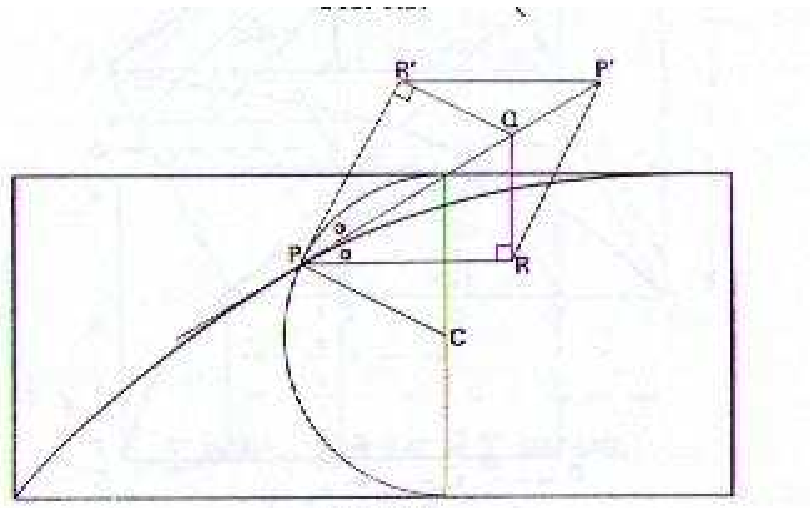


FIG. 5.18

Vector de translació, $\vec{u}$: $(a, 0)$

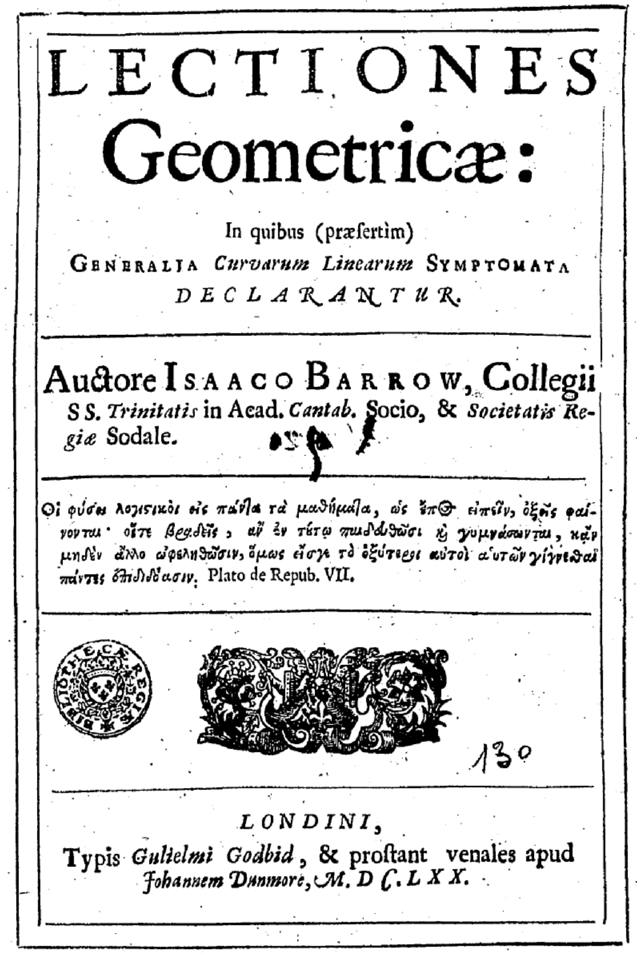
Vector de rotació, $\vec{w}$: $(-a\cos t, a\sin t)$

Suma del paral.lelogram és el vector velocitat, $\vec{v}$:

$$(a(1-\cos t), a\sin t)$$

$\vec{v}$ determina la tangent a la cicloide al punt P.

3. ISAAC BARROW (1630-1677)



LECTIONES
Geometricæ:

In quibus (præsertim)
GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA
DECLARANTUR.

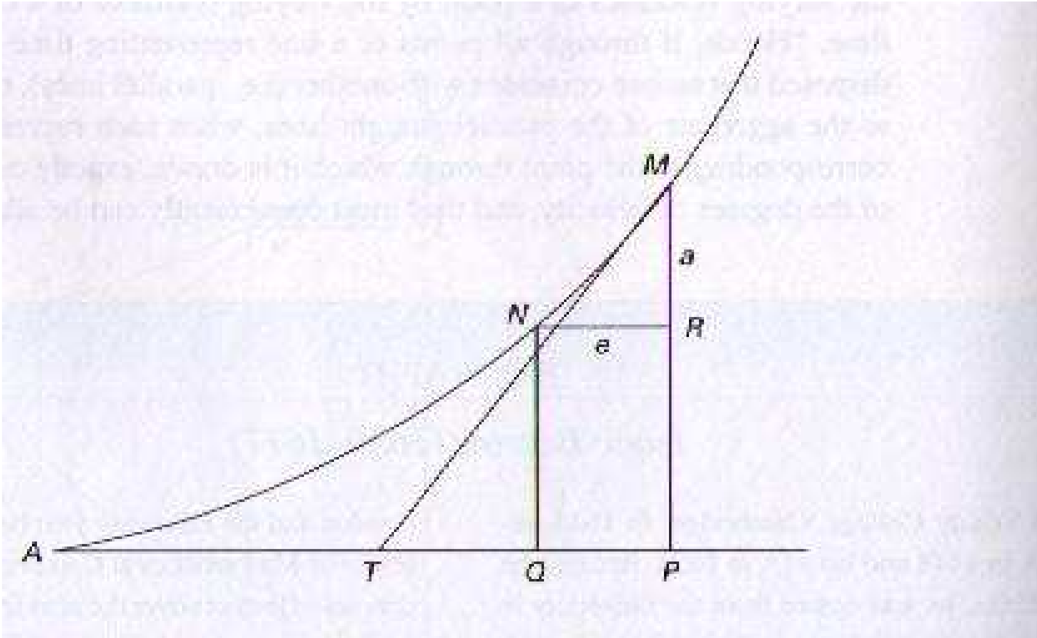
Auctore ISAACO BARROW, Collegii
S S. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

130

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud
Johannem Dunmore, M. D C. L X X.

Lliçó X i el triangle característic



- $f(x,y)=0, x->x+e, y->y+a$
- Substitueix a l'equació.
- Elimina les potències d'*e* i *a*.
- L'arc *MN* "indefinidament petit" igual al segment *MN.*
- Per semblança de triangles el pendent: $y/t = a/e$

BARROW I LA RELACIÓ ENTRE QUADRATURA I TANGENT

Galileo i Oresme:

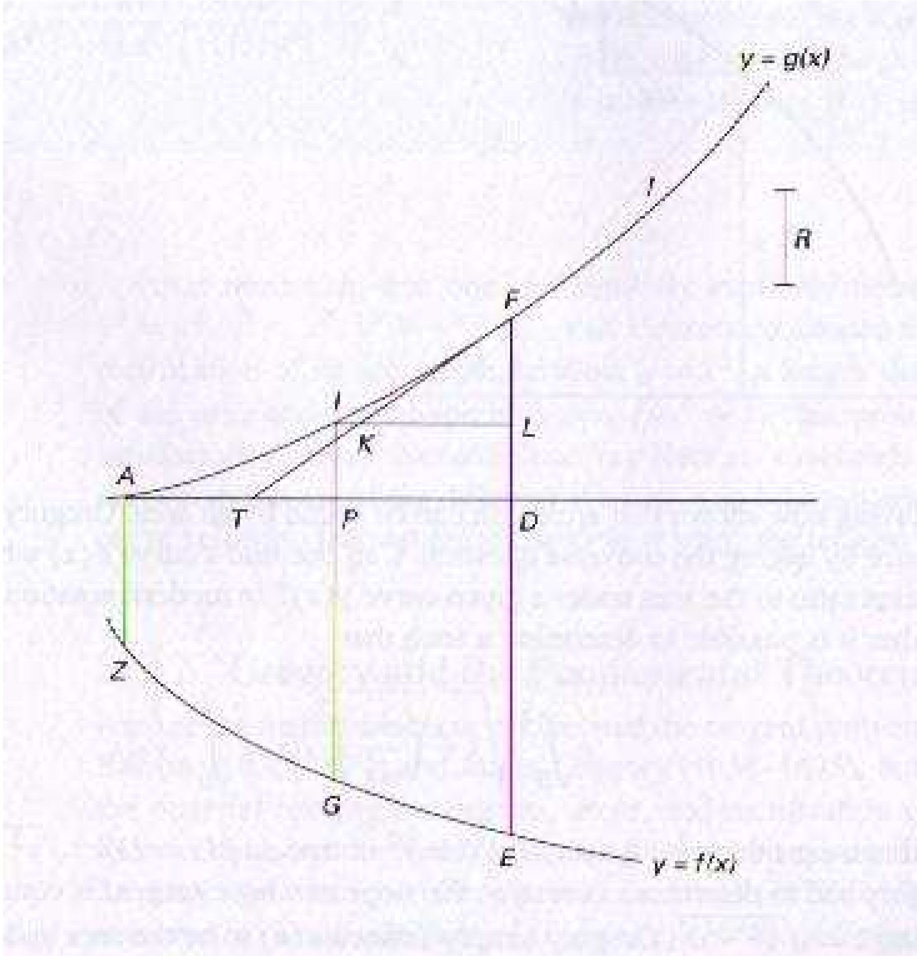
Àrea de la corba *temps* versus *velocitat*
= *espai recorregut*

Aplicació temps i moviment a l'estudi de corbes permet Torricelli i Barrow (i Gregory) entendre intuïtivament la relació inversa entre quadratura i tangent.

Tangent de la corba *temps* versus *espai recorregut*
= *velocitat*

Proposició XI. Teorema (*Lliçó X*)

Let *ZGE* be any curve of which the axis is *AD* and let the ordinates applied to this axis, *AZ*, *PG*, *DE*, continually increase from the initial ordinate *AZ*. Also let *AIF* be a curve such that if any straight line *EDF* is drawn perpendicular to *AD*, cutting the curves in the points *E*, *F*, and *AD* in *D*, the rectangle contained by *DF* and a given lenth *R* is equal to the intercepted space *ADEZ*. Also let *DE:DF* = *R*: *DT* and join *FT*. Then *TF* will be tangent to *AIF*.



REFERÈNCIES

BARON, M. E. (1969). *The origins of the infinitesimal calculus*. Oxford [etc.]: Pergamon Press

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag

FAUVEL, J.; GRAY, J. (eds.) (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. London: MacMillan.

GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (1992). *Las Raíces del cálculo infinitesimal en el s. XVII: una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: Harper Collins, 2a ed. 1998

MAHONEY, M. S. (1994). *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1ª ed., 1973]

PLA, J., VIADER, P. (1999). *René Descartes. La geometria*. Clàssics de la Ciència. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans/Editorial Pòrtic/Eumo Editorial.

PLA, J., VIADER, P., PARADÍS, J. (2008). *Pierre de Fermat. Obra Matemàtica vària*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press

STRUIK, D. J. (ed.) (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1a ed., 1969]

5. EL CÀLCUL SEGONS NEWTON

25 desembre 1642 /4 gener 1643 Neix a Woolsthorpe (Lincolnshire).

1661-1665 BA del Trinity College, Cambridge, on des de 1663 Barrow és Professor Lucasià de Matemàtiques (el primer que ocupà aquesta càtedra).

1665-1666 Torna a Woolsthorpe durant la gran plaga *(biennium mirabilissimum*: càlcul, naturalesa de la llum, teoria de gravitació).

1666 Gran Incendi de Londres.

1669 Amb la influència de Barrow, Newton obté la plaça de Professor Lucasià de Matemàtiques.

1696 Abandona Cambridge per custodiar la Casa de la Moneda a Londres.

1703 President de la Royal Society de Londres.

1705 **Sir** Isaac Newton

20 març 1727/30 març 1727 Mor i és enterrat a l'Abadia de Westminster.

Obres publicades

1687 *Philosophiae naturalis principia mathematica*

1704 *Opticks* amb l'apèndix *Tractatus de quadratura curvarum* (1690s)

1707 *Arithmetica universalis*

1711 *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669)

1712 *Commercium Epistolicum Collinii & aliorum, De Analysi promota.*

1736 *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1671)

1967-1981 *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (8 vols.) editat per D. T. Whiteside.

Breu cronologia del càlcul de fluxions

Antecedents matemàtics: Oughtred, Descartes, Viète, Heuraet, Hudde. Newton rebé especial influència del seu mestre Isaac Barrow, pel que respecta als indivisibles i a les quantitats que flueixen, i també de John Wallis i de James Gregory, quant a l'ús de sèries i quadratures.

1. El 1669 Newton ja havia escrit *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que no es publicà fins el 1711. Representa el primer document sobre el seu càlcul. Relació amb la publicació 1668 de *Logarithmotechnia* de Mercator (quadratura de la hipèrbola amb sèries). Aquí els elements bàsics són les quantitats infinitament petites que provenen de magnituds finites. El *moment* és un increment infinitesimal: l'abscissa *x* passa a ser $x+o$, el moment d'una línia és un punt, el moment d'un àrea és una línia, ... Newton aplica el mètode directament i inversa, doncs relaciona el càlcul de l'àrea amb la raó de canvi de l'àrea. L'ús de sèries infinites fa que el càlcul sigui un algorisme universal.

2. El *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* és del 1671. No publicat fins el 1736, és on apareixen la seva notació i conceptes característics. El moviment continu genera les quantitats variables o *fluents*. La seva raó de generació (o velocitat) són les *fluxions*. El problema fonamental consisteix a, donada la relació entre quantitats, trobar la relació de les seves fluxions, i viceversa. Els *moments* ($\dot{x}o$) són les components infinitament petites generades pel moviment (velocitat $\dot{x}$) en un interval de temps infinitament petit (o), tot i que ell formalment no considera el temps. Utilitzant el teorema del binomi, a la quantitat fluent quan *x* passa a ser $x+\dot{x}o$ se li resta la quantitat fluent en *x*, després el resultat de la resta es divideix per o i, finalment, com que o és infinitament petit, és zero comparat amb la resta. Troba fluents a partir de fluxions, invertint les regles per trobar fluxions a partir de fluents.

Newton's 1671 treatise on fluxions

from Newton, *The method of fluxions, and infinite series*, 1736, 21–22, 24–26, 44–46
Eighteenth Century Collection Online, Gale Digital Collection

Notation
Recall from Chapter 2 that in expressions involving ratios :: is to be read as =.

PROB. I.

The Relation of the Flowing Quantities to one another being given, to determine the Relation of their Fluxions.

SOLUTION.

1. Diſpoſe the Equation, by which the given Relation is expreſs'd, according to the Dimenſions of ſome one of its flowing Quantities, ſuppoſe x, and multiply its Terms by any Arithmetical Progreſſion, and then by $\frac{\dot{x}}{x}$. And perform this Operation ſeparately for every one of the flowing Quantities. Then make the Sum of all the Products equal to nothing, and you will have the Equation required.

2. EXAMPLE I. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; firſt diſpoſe the Terms according to x, and then according to y, and multiply them in the following manner.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Mult.}\quad x^3 \quad -ax^2 \quad +axy \quad -y^3 & -y^3 \quad +axy \quad {-ax^2 \atop +x^3} \\
\text{by}\quad \frac{3\dot{x}}{x} \;.\; \frac{2\dot{x}}{x} \;.\; \frac{\dot{x}}{x} \;.\; 0 & \frac{3\dot{y}}{y} \;.\; \frac{\dot{y}}{y} \;.\; 0 \\
\hline
\text{makes}\quad 3\dot{x}x^2 \quad -2a\dot{x}x \quad +a\dot{x}y \quad * & -3\dot{y}y^2 \quad +a\dot{y}x \quad *
\end{array}$$

The Sum of the Products is $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$. For if you take x at pleaſure, the Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ will give y. Which being determined, it will be $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

3. Ex. 2. If the Relation of the Quantities x, y, and z, be expreſs'd by the Equation $2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$,

$$\begin{array}{l|l|l}
\text{Mult.}\quad 2y^3 \quad {+xx \atop {-2cz \atop +3z^2}} \times y \quad -z^3 & yx^2 \quad +2y^3 \; {-2cyz \atop {+3yz^2 \atop -z^3}} & -z^3 \quad +3yz^2 \quad -2cyz \quad {+x^2y \atop +2y^3} \\
\text{by}\quad \frac{2\dot{y}}{y} \;.\; 0 \;.\; -\frac{\dot{y}}{y} & \frac{2\dot{x}}{x} \;.\; 0. & \frac{3\dot{z}}{z} \;.\; \frac{2\dot{z}}{z} \;.\; \frac{\dot{z}}{z} \;.\; 0. \\
\hline
\text{makes}\quad 4\dot{y}y^2 \quad * \quad +\frac{\dot{y}z^3}{y} & 2\dot{x}xy \quad * & -3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}zy - 2c\dot{z}y \quad *
\end{array}$$

Where-

Wherefore the Relation of the Celerities of Flowing, or of the Fluxions $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$, is $4\dot{y}y^2 + \frac{\dot{y}z^3}{y} + 2\dot{x}xy - 3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}zy - 2c\dot{z}y = 0$.

4. But ſince there are here three flowing Quantities, x, y, and z, another Equation ought alſo to be given, by which the Relation among them, as alſo among their Fluxions, may be intirely determined. As if it were ſuppoſed that $x + y - z = 0$. From whence another Relation among the Fluxions $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$ would be found by this Rule. Now compare theſe with the foregoing Equations, by expunging any one of the three Quantities, and alſo any one of the Fluxions, and then you will obtain an Equation which will intirely determine the Relation of the reſt.

5. In the Equation propos'd, whenever there are complex Fractions, or ſurd Quantities, I put ſo many Letters for each, and ſuppoſing them to repreſent flowing Quantities, I work as before. Afterwards I ſuppreſs and exterminate the aſſumed Letters, as you ſee done here.

6. Ex. 3. If the Relation of the Quantities x and y be $yy - aa - x\sqrt{aa - xx} = 0$; for $x\sqrt{aa - xx}$ I write z, and thence I have the two Equations $yy - aa - z = 0$, and $a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0$, of which the firſt will give $2\dot{y}y - \dot{z} = 0$, as before, for the Relation of the Celerities $\dot{y}$ and $\dot{z}$, and the latter will give $2a^2\dot{x}x - 4\dot{x}x^3 - 2\dot{z}z = 0$, or $\frac{a^2\dot{x}x - 2\dot{x}x^3}{z} = \dot{z}$, for the Relation of the Celerities $\dot{x}$ and $\dot{z}$. Now $\dot{z}$ being expunged, it will be $2\dot{y}y \frac{-a^2\dot{x}x + 2\dot{x}x^3}{z} = 0$, and then reſtoring $x\sqrt{aa - xx}$ for z, we ſhall have $2\dot{y}y \frac{-a^2\dot{x} + 2\dot{x}x^2}{\sqrt{aa - xx}} = 0$, for the Relation between $\dot{x}$ and $\dot{y}$, as was required.

[...]

DEMONSTRATION *of the Solution.*

13. The Moments of flowing Quantities, (that is, their indefinitely ſmall Parts, by the acceſſion of which, in indefinitely ſmall portions of Time, they are continually increaſed,) are as the Velocities of their Flowing or Increaſing.

14. Wherefore if the Moment of any one, as x, be repreſented by the Product of its Celerity $\dot{x}$ into an indefinitely ſmall Quantity o (that is, by $\dot{x}o$,) the Moments of the others v, y, z, will be repreſented by $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$; becauſe $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, and $\dot{z}o$, are to each other as $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$.

15. Now ſince the Moments, as $\dot{x}o$ and $\dot{y}o$, are the indefinitely little acceſſions of the flowing Quantities x and y, by which thoſe Quantities are increaſed through the ſeveral indefinitely little intervals of Time; it follows, that thoſe Quantities x and y, after any indefinitely ſmall interval of Time, become $x+\dot{x}o$ and $y+\dot{y}o$. And therefore the Equation, which at all times indifferently expreſſes the Relation of the flowing Quantities, will as well expreſs the Relation between $x+\dot{x}o$ and $y+\dot{y}o$, as between x and y: So that $x+\dot{x}o$ and $y+\dot{y}o$ may be ſubſtituted in the ſame Equation for thoſe Quantities, inſtead of x and y.

16. Therefore let any Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ be given, and ſubſtitute $x+\dot{x}o$ for x, and $y+\dot{y}o$ for y, and there will ariſe

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 & +3\dot{x}ox^2 & +3\dot{x}^2oox & +\dot{x}^3o^3 \\ -ax^2 & -2a\dot{x}ox & -a\dot{x}^2oo & \\ +axy & +a\dot{x}oy & +a\dot{y}ox & +a\dot{x}\dot{y}oo \\ -y^3 & -3\dot{y}oy^2 & -3\dot{y}^2ooy & -\dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

17.

17. Now by Suppoſition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, which therefore being expunged, and the remaining Terms being divided by o, there will remain $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. But whereas o is ſuppoſed to be infinitely little, that it may repreſent the Moments of Quantities; the Terms that are multiply'd by it will be nothing in reſpect of the reſt. Therefore I reject them, and there remains $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, as above in Examp. 1.

18. Here we may obſerve, that the Terms that are not multiply'd by o will always vaniſh, as alſo thoſe Terms that are multiply'd by o of more than one Dimenſion. And that the reſt of the Terms being divided by o, will always acquire the form that they ought to have by the foregoing Rule: Which was the thing to be proved.

19. And this being now ſhewn, the other things included in the Rule will eaſily follow. As that in the propos'd Equation ſeveral flowing Quantities may be involved; and that the Terms may be multiply'd, not only by the Number of the Dimenſions of the flowing Quantities, but alſo by any other Arithmetical Progreſſions; ſo that in the Operation there may be the ſame difference of the Terms according to any of the flowing Quantities, and the Progreſſion be diſpos'd according to the ſame order of the Dimenſions of each of them. And theſe things being allow'd, what is taught beſides in Examp. 3, 4, and 5, will be plain enough of itſelf.

PROB. II.

An Equation being propoſed, including the Fluxions of Quantities, to find the Relations of thoſe Quantities to one another.

A PARTICULAR SOLUTION.

1. As this Problem is the Converſe of the foregoing, it muſt be ſolved by proceeding in a contrary manner. That is, the Terms multiply'd by $\dot{x}$ being diſpoſed according to the Dimenſions of x; they muſt be divided by $\frac{\dot{x}}{x}$, and then by the number of their Dimenſions, or perhaps by ſome other Arithmetical Progreſſion. Then the ſame work muſt be repeated with the Terms multiply'd by $\dot{v}$, $\dot{y}$,

E or

or $\dot{z}$, and the Sum refulting muft be made equal to nothing, rejecting the Terms that are redundant.

2. EXAMPLE. Let the Equation propofed be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. The Operation will be after this manner:

Divide	$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	Divide	$-3\dot{y}y^2 \quad * \quad + a\dot{y}x$
by $\frac{\dot{x}}{x}$. Quot.	$3x^3 \quad -2ax^2 \quad +ayx$	by $\frac{\dot{y}}{y}$. Quot.	$-3y^3 \quad * \quad + axy$
Divide by	$3 \quad . \quad 2 \quad . \quad 1.$	Divide by	$3 \quad . \quad 2 \quad . \quad 1.$
Quote	$x^3 \quad -ax^2 \quad +ayx$	Quote	$-y^3 \quad * \quad + axy$

Therefore the Sum $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, will be the required Relation of the Quantities x and y. Where it is to be obferved, that tho' the Term axy occurs twice, yet I do not put it twice in the Sum $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, but I reject the redundant Term. And fo whenever any Term recurs twice, (or oftener when there are feveral flowing Quantities concern'd,) it muft be wrote only once in the Sum of the Terms.

3. There are other Circumftances to be obferved, which I fhall leave to the Sagacity of the Artift; for it would be needlefs to dwell too long upon this matter, becaufe the Problem cannot always be folved by this Artifice. I fhall add however, that after the Relation of the Fluents is obtain'd by this Method, if we can return, by Prob. 1. to the propofed Equation involving the Fluxions, then the work is right, otherwife not.

[...]

ſimple Terms $\frac{y}{a}+\frac{xy}{a^2}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. by dividing the Numerator y by the Denominator $a-x$, I ſhall have $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\frac{y}{a}+\frac{xy}{a^2}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. by the help of which the Relation between x and y is to be determined.

9. So the Equation $y\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}xx$ being given, or $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+xx$, and by a farther Reduction $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$: I extract the ſquare Root out of the Terms $\frac{1}{4}+xx$, and obtain the infinite Series $\frac{1}{2}+x^2-x^4+2x^6-5x^8+14x^{10}$, &c. which if I ſubſtitute for $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$, I ſhall have $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+x^2-x^4+2x^6-5x^8$, &c. or $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-x^2+x^4-2x^6+5x^8$, &c. according as $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ is either added to $\frac{1}{2}$, or ſubtracted from it.

10. And thus if the Equation $\dot{y}^3+ax\dot{x}^2\dot{y}+a^2\dot{x}^2\dot{y}-x^3\dot{x}^3-2\dot{x}^3a^3=0$ were propoſed, or $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3}+ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+a^2\frac{\dot{y}}{\dot{x}}-x^3-2a^3=0$, I extract the Root of the affected Cubick Equation, and there ariſes $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c. as may be ſeen before.

11. But here it may be obſerved, that I look upon thoſe Terms only as compounded, which are compounded in reſpect of flowing Quantities. For I eſteem thoſe as ſimple Quantities which are compounded only in reſpect of given Quantities. For they may be reduced to ſimple Quantities by ſuppoſing them equal to other given Quantities. Thus I conſider the Quantities $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bcc}{ax+bx}$, $\frac{b^4}{ax^2+bx^2}$, $\sqrt{ax+bx}$, &c. as ſimple Quantities, becauſe they may may all be reduced to the ſimple Quantities $\frac{ex}{c}$, $\frac{x}{e}$, $\frac{bc^2}{ex}$, $\frac{b^4}{ex^2}$, $\sqrt{ex}$ (or $e^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$) &c. by ſuppoſing $a+b=e$.

12. Moreover, that the flowing Quantities may the more eaſily be diſtinguiſh'd from one another, the Fluxion that is put in the Numerator of the Ratio, or the Antecedent of the Ratio, may not improperly be call'd the *Relate Quantity*, and the other in the Denominator, to which it is compared, the *Correlate:* Alſo the flowing

PROB. III.

To determine the Maxima *and* Minima *of Quantities.*

1. When a Quantity is the greateſt or the leaſt that it can be, at that moment it neither flows backwards or forwards. For if it flows forwards, or increaſes, that proves it was leſs, and will preſently be greater than it is. And the contrary if it flows backwards, or decreaſes. Wherefore find its Fluxion, by Prob. 1. and ſuppoſe it to be nothing.

2. EXAMP. 1. If in the Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ the greateſt Value of x be required; find the Relation of the Fluxions of x and y, and you will have $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Then making $\dot{x} = 0$, there will remain $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, or $3y^2 = ax$. By the help of this you may exterminate either x or y out of the primary Equation, and by the reſulting Equation you may determine the other, and then both of them by $-3y^2 + ax = 0$.

3. This Operation is the ſame, as if you had multiply'd the Terms of the propoſed Equation by the number of the Dimenſions of the other flowing Quantity y. From whence we may derive the

famous Rule of *Huddenius*, that, in order to obtain the greateſt or leaſt Relate Quantity, the Equation muſt be diſpoſed according to the Dimenſions of the Correlate Quantity, and then the Terms are to be multiply'd by any Arithmetical Progreſſion. But ſince neither this Rule, nor any other that I know yet publiſhed, extends to Equations affected with ſurd Quantities, without a previous Reduction; I ſhall give the following Example for that purpoſe.

4. EXAMP. 2. If the greateſt Quantity y in the Equation $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$ be to be determin'd, ſeek the Fluxions of x and y, and there will ariſe the Equation $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2} - \frac{4a\dot{x}xy + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. And ſince by ſuppoſition $\dot{y} = 0$, omit the Terms multiply'd by $\dot{y}$, (which, to ſhorten the labour, might have been done before, in the Operation,) and divide the reſt by $\dot{x}x$, and there will remain $3x - \frac{2ay+3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$. When the Reduction is made, there will ariſe $4ay + 3xx = 0$, by help of which you may exterminate either of the quantities x or y out of the propos'd Equation, and then from the reſulting Equation, which will be Cubical, you may extract the Value of the other.

5. From this Problem may be had the Solution of theſe following.

I. *In a given Triangle, or in a Segment of any given Curve, to inſcribe the greateſt Rectangle.*

II. *To draw the greateſt or the leaſt right Line, which can lie between a given Point, and a Curve given in poſition. Or, to draw a Perpendicular to a Curve from a given Point.*

III. *To draw the greateſt or the leaſt right Lines, which paſſing through a given Point, can lie between two others, either right Lines or Curves.*

IV. *From a given Point within a Parabola, to draw a right Line, which ſhall cut the Parabola more obliquely than any other. And to do the ſame in other Curves.*

V. *To determine the Vertices of Curves, their greateſt or leaſt Breadths, the Points in which revolving parts cut each other*, &c.

VI. *To find the Points in Curves, where they have the greateſt or leaſt Curvature.*

VII. *To find the leaſt Angle in a given Ellipſis, in which the Ordinates can cut their Diameters.*

VIII.

VIII. *Of Ellipſes that paſs through four given Points, to determine the greateſt, or that which approaches neareſt to a Circle.*

IX. *To determine ſuch a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by Light coming from a great diſtance, and which is refracted by the nearer Hemiſphere.*

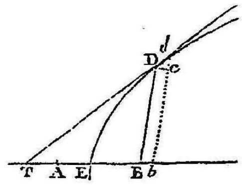
And many other Problems of a like nature may more eaſily be propoſed than reſolved, becauſe of the labour of Computation.

PROB. IV.

To draw Tangents to Curves.

Firſt Manner.

1. Tangents may be variouſly drawn, according to the various Relations of Curves to right Lines. And firſt let BD be a right Line, or Ordinate, in a given Angle to another right Line AB, as a Baſe or Abſciſs, and terminated at the Curve ED. Let this Ordinate move through an indefinitely ſmall Space to the place *bd*, ſo that it may be increaſed by the Moment *cd*, while AB is increaſed by the Moment B*b*, to which D*c* is equal and parallel.



Let D*d* be produced till it meets with AB in T, and this Line will touch the Curve in D or *d*; and the Triangles *dc*D, DBT will be ſimilar. So that it is TB : BD :: D*c* (or B*b*) : *cd*.

2. Since therefore the Relation of BD to AB is exhibited by the Equation, by which the nature of the Curve is determined; ſeek for the Relation of the Fluxions, by Prob. 1. Then take TB to BD in the Ratio of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD will touch the Curve in the Point D.

3. Ex. 1. Calling AB $= x$, and BD $= y$, let their Relation be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. And the Relation of the Fluxions will be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. So that $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Therefore BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Therefore the Point D being given, and thence DB and AB, or y and x, the length BT will be given, by which the Tangent TD is determined.

4.

Figura 1. Reproducció a Stedall (2009), pp. 108-114.

3. A la dècada dels 1690, Newton va compondre *De quadratura curvarum*, que apareix publicat el 1704, com apèndix de l'*Opticks* (controvèrsia amb Hooke!). Aquí les quantitats no estan formades per moments ni per parts infinitament petites, sinó que s'originen pel moviment continu. L'element bàsic és la *raó primera i última* (primera, o dels increments naixents; i última, o dels increments evanescents), que és el límit de la raó de fluxions (quan o s'apropa a zero). Es correspon amb l'estat final d'un procés

cinemàtic. Per exemple, la raó de canvi de *x* a la de x^n (és a dir, la fluxó de *x* a la fluxió de x^n) és com 1 és a nx^{n-1}, que és la *raó última* dels canvis (aplicant el teorema del binomi a $(x+o)^n$ i finalment fent desaparèixer *o*). En aquesta obra: visió més geomètrica, relacionant fluxions i fluents a les equacions de les corbes i les seves àrees, respectivament.

Newton's first publication of his calculus
from Newton, *Tractatus de quadratura curvarum*, 1704, 170, 172, 175–176
Eighteenth Century Collection Online, Gale Digital Collection

[170]

TRACTATUS
DE
Quadratura Curvarum.

QUantitates indeterminatas ut motu perpetuo creſcentes vel decreſcentes, id eſt ut fluentes vel defluentes in ſequentibus conſidero, deſignoq; literis z, y, x, v, & earum fluxiones ſeu celeritates creſcendi noto iiſdem literis punctatis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones ſeu mutationes magis aut minus celeres quas ipſarum z, y, x, v fluxiones ſecundas nominare licet & ſic dignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & harum fluxiones primas ſeu ipſarum z, y, x, v fluxiones tertias ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, & quartas ſic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ ſunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & hæ ſunt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ & hæ ſunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v : ſic hæ quantitates conſiderari poſſunt ut fluxiones aliarum quas ſic deſignabo,

z,

[...]

[172]

PROP. I. PROB. I.

Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones.

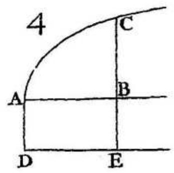
Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujuſq; fluentis quam involvit, & in ſingulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem ſuam, & aggregatum factorum omnium ſub propriis ſignis erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x, & in ſingulis multiplicationibus pro dignitatis latere, ſeu x unius dimenſionis, ſcribatur $\dot{x}$,& ſumma factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy$. Idem fiat in y & prodibit $- {}^2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur ſumma factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy - {}^2xy\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Dico quod hac æquatione definitur relatio fluxionum.

[...]



Notation
For the sake of clarity in Proposition III, modern brackets have been introduced around the coefficients in each equation.

TRANSLATION

TREATISE
on the quadrature of curves

In what follows I consider unknown quantities in perpetual motion, increasing or decreasing, that is as flowing or receding, and I designate them by the letters z, y, x, v, and their fluxions or increasing speeds I denote by these pointed letters $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$. There are also changes or fluxions of these fluxions, more or less than the speeds of z, y, x, v; one may call these second fluxions and denote them thus $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, and the first fluxions of these, or third fluxions of z, y, x, v, by $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, and the fourth thus $\ddddot{z}, \ddddot{y}, \ddddot{x}, \ddddot{v}$. And in whatever way, $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, are fluxions of the quantities $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, and these are fluxions of the quantities $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, and these are fluxions of the original quantities z, y, x, v;

[...]

[172]

PROPOSITION I, PROBLEM I
Given any equation involving fluent quantities, to find the fluxions

Solution

Let every term of the equation be multiplied by the index of the power of that fluent quantity it contains, and in each multiplication let a root of the power be changed into its fluxion, and the sum of all the terms under the proper sign will be a new equation.

Explanation

Let a, b, c, d, etc. be known and unchangeable quantities, and let there be proposed any equation involving fluent quantities z, y, x, etc., such as $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Let the terms be multiplied first by the indices of the powers of x, and in each multiplication, for the root of the power, or one dimension of x, there is written $\dot{x}$, and the sum of the terms will be $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy$. Do the same for y and it will produce $2xy\dot{y}$. Do the same for z and it will produce $aa\dot{z}$. The sum of the terms is put equal to nothing, and there will be had the equation $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy - 2xy\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. I say that the relationship between the fluxions is defined by this equation.

[...]

[175]

PROPOSITION II, PROBLEM II
To find curves when the quadrature can be done

Figure 4 Suppose ABC is the figure to be found, BC a perpendicular ordinate, and AB the abscissa. Produce CB to E so that $BE = 1$, and complete the parallelogram $ABED$; then the fluxions of the areas ABC, $ABED$, will be as BC and BE. Therefore taking any equation by which the relationship of the areas is defined, thence also will be given the relationship of the ordinates BC and BE by Proposition I. Which was to be found.

There are examples of this in the two following propositions.

PROPOSITION III, THEOREM I

[176] For the abscissa AB and the area AE or $AB \times 1$ let there be everywhere written z, and for $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n}+$ etc. let there be written R; if, moreover, suppose the area of the curve is $z^\theta R^\lambda$. Then the ordinate BC will be $\theta e + (\theta + \lambda n)fz^n + (\theta + 2\lambda n)gz^{2n} + (\theta + 3\lambda n)hz^{3n}+$ etc. times $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Demonstration

If $z^\theta R^\lambda = v$, then by Proposition I, $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Instead of R^λ in the first term of the equation and z^θ in the second write $RR^{\lambda-1}$ and $zz^{\theta-1}$, and then $\theta\dot{z}R + \lambda z\dot{R}$ times $z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Moreover, $R = e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n}$ etc. and thence by Proposition I, $\dot{R} = nf\dot{z}z^{n-1} + 2ng\dot{z}z^{2n-1} + 3nh\dot{z}z^{3n-1}+$ etc. Substituting this and writing BE or 1 for $\dot{z}$, gives $\theta e + (\theta + \lambda n)fz^n + (\theta + 2\lambda n)gz^{2n} + (\theta + 3\lambda n)hz^{3n}+$ etc. times $z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = v = BC$.

Which was to be demonstrated.

Figura 2. Reproducció a Stedall (2009), pp. 115-119.

A TABLE

Of the more simple kind of Curves which may be squared.

		Forms of Curves.	Areas of the Curves.
I		$dz^{\eta-1}=y$	$\frac{d}{\eta}z^\eta = t.$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^\eta+ffz^{2\eta}}=y$	$\frac{dz^\eta}{ee+efz^\eta}=t.$ Or $\frac{-d}{\eta fe+\eta ffz^\eta}=t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^3=t.$ Where $R=\sqrt{e+fz^\eta}$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{-4e+6fz^\eta}{15\eta ff}dR^3=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{16ee-24efz^\eta+30ffz^{2\eta}}{105\eta f^3}dR^3=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{-96e^3+144eefz^\eta-180effz^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}=t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{2d}{\eta f}R=t.$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{-4e+2fz^\eta}{3\eta ff}dR=t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{16ee-8efz^\eta+6ffz^{2\eta}}{15\eta f^3}dR=t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{-96e^3+48eefz^\eta-36effz^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR=t$

Figura 3. Reproducció a Struik (1986), p. 312.

Però la primera publicació del càlcul de Newton oficialment es troba als *Principia mathematica* (1687).

- Llibre I: dinàmica de cossos en moviment sota forces centrals; teoria de la lluna i atraccions d'una esfera.
- Llibre II: aplicacions a cossos en moviment en medis resistents.
- Llibre III: el sistema del món.

L'enfocament del primer llibre és semblant al de *De quadratura curvarum*. Tanmateix, encara depèn dels infinitesimals i està escrit a l'antiga manera geomètrica sintètica, amb poques referències a les fluxions. El segon llibre exposa els fonaments d'aquest mètode general. Tot i que apareix l'ús de sèries i d'alguna manipulació algèbrica, no es presenta l'algoritme de les fluxions de manera adient i la naturalesa dels moments queda poc clara, una de les raons de la confusió posterior entre fluxions, infinitesimals, moments i diferencials leibnizians.

Lemma 1, Book I. Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer to each other than bt any given difference, become ultimately equal.

Lemma VII, Book I. The same things being supposed, I say that the ultimate ratio of the arc, chord, and tangent, any one to any other, is the ratio of equality.

Scholium, Book I. If in comparing with each other indeterminate quantities of different sorts, any one is said to be directly or inversely as any other, the meaning is, that the former is augmented or diminished in the same ratio as the latter, or as its reciprocal. And if any one is said to be as any other two or more, directly or inversely, the meaning is, that the first is augmented or diminished in the ratio compounded of the ratios in which the others, or the reciprocals of the others, are augmented or diminished. Thus, if A is said to be as B directly, and C directly, and D inversely, the meaning is, that A is augmented or diminished in the same ratio as $B \cdot C \cdot 1/D$, that is to say, that A and BC/D are to each other in a given ratio.

Crítiques al càlcul de Newton

El 1734 George Berkeley (1685-1753) publica *The Analyst*, el seu atac al nou càlcul. Berkeley no nega la utilitat del nou càlcul ni la validesa dels resultats obtinguts. Les crítiques de Berkeley són de caire ontològic i de caire lògic. En el primer cas, ataca els febles fonaments de la nova matèria (definicions poc satisfactòries de termes com les quantitats infinitament petites o els diferencials, la manca de realitat física de la velocitat, etc.). D'altra banda, Berkeley critica la "compensació d'errors" en les demostracions, que porta Newton a trobar resultats vàlids. La "compensació d'errors" consisteix a considerar primer que x té un increment i després, per arribar al resultat, a fer que l'increment s'esvaeixi.

Lemma II, Book II. The moment of any *genitum* is equal to the moments of each of the generating sides multiplied by the indices of the powers of those sides, and by their coefficients continually. (…) the moment or mutation of the generated rectangle AB will be

$aB + bA$; (…) and the moments of the generated powers A^2, A^3, …. will be $2aA$, $3aA^2$,…

(…)

Case 1. Any rectangle, as AB, augmented by a continual flux, when, as yet, there wanted of the sides A and B half their moments $\frac{1}{2}a$ and $\frac{1}{2}b$, was $A - \frac{1}{2}a$ into $B - \frac{1}{2}b$, or $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; but as soon as the sides A and B are augmented by the other half-moments, the rectangle becomes $A + \frac{1}{2}a$ into $B + \frac{1}{2}b$, or $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. From this rectangle subtract the former rectangle, and there will remain the excess $aB + bA$. Therefore with the whole increments a and b of the sides, the increment $aB + bA$ of the rectangle is generated. Q. E. D.

Per defensar Newton davant de Berkeley, James Jurin publicà una sèrie de pamflets però els seus arguments eren febles. Més endavant entrà Benjamin Robins en la discussió i començà un debat entre Jurin i Robins a l'entorn del concepte de límit. Jurin considerava el límit d'un procés cinemàtic, que finalment era assolit. Robins treballava amb el mètode d'exhaustió i no amb un procés cinemàtic, i el límit no s'assolia mai.

A partir d'aquest debat, els matemàtics de la Gran Bretanya rellegeixen Newton. Colin Maclaurin (1698-1746) tingué un rol important a l'hora de consolidar el càlcul de fluxions. El seu *Treatise of Fluxions* (1742) és un intent de fonamentar el càlcul sobre la geometria cinemàtica. En particular defineix la fluxió com la *velocitat instantània*, mesurada no per l'espai descrit de fet, sinó pel que hauria descrit si el moviment hagués seguit de manera uniforme a partir d'aquest terme. Fa servir un concepte intuïtiu per donar base ontològica al càlcul. El primer llibre presenta el càlcul com una generalització del mètode d'Arquimedes. El segon llibre exposa el poder algorísmic del càlcul.

Referències

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (1998). *The Norton History of the Mathematical Sciences*. New York [etc.]: Norton.

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: Harper Collins, 2a ed. 1998.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press.

STRUIK, D. J. (ed.) (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1a ed., 1969].

6. SÈRIES DE POTÈNCIES

Newton i el teorema general del binomi

1656: *Arithmetica infinitorum* de John Wallis (1616-1703)

1668: *Logarithmotechnia* de Nicolaus Mercator (1620-1687). La primera sèrie de potències publicada $\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - aa^3 + \&c.$ (per divisió); quadratura de la hipèrbola.

1664-1665: *De analysi* de Newton, a Barrow i a Collins, i Collins a Gregory.

1676: *Epistola prior* i *posterior* de Newton a Leibniz (a travès de Henry Oldenburg), indicant tres maneres de trobar sèries: per interpolació, per operacions algebraiques i per resolució d'equacions.

they are commonly carried out in decimal numbers. These are the foundations of these reductions: but extractions of roots are much shortened by this theorem,

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{etc.},$$

where $P + PQ$ signifies the quantity whose root or even any power, or the root of a power, is to be found; P signifies the first term of that quantity, Q the remaining terms divided by the first, and m/n the numerical index of the power of $P + PQ$, whether that power is integral or (so to speak) fractional, whether positive or negative. For as analysts, instead of aa, aaa, etc., are accustomed to write a^2, a^3, etc., so instead of $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c:a^5}$, etc. I write $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, and instead of $1/a$, $1/aa$, $1/a^3$, I write a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.[1] And so for

$$\frac{aa}{\sqrt{c:(a^3 + bbx)}}$$

I write $aa(a^3 + bbx)^{-\frac{1}{3}}$, and for

$$\frac{aab}{\sqrt{c:\{(a^3 + bbx)(a^3 + bbx)\}}}$$

I write $aab(a^3 + bbx)^{-\frac{2}{3}}$: in which last case, if $(a^3 + bbx)^{-\frac{2}{3}}$ is supposed to be $(P + PQ)^{m/n}$ in the Rule, then P will be equal to a^3, Q to bbx/a^3, m to -2, and n to 3. Finally, for the terms found in the quotient in the course of the working I employ A, B, C, D, etc., namely, A for the first term, $P^{m/n}$; B for the second term, $(m/n)AQ$; and so on. For the rest, the use of the rule will appear from the examples.

Example 1.

$$\sqrt{(c^2 + x^2)} \quad \text{or} \quad (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{etc.}$$

For in this case, $P = c^2$, $Q = x^2/c^2$, $m = 1$, $n = 2$, $A\ (= P^{m/n} = (cc)^{\frac{1}{2}}) = c$, $B\ (= (m/n)AQ) = x^2/2c$, $C\left(= \frac{m-n}{2n} BQ\right) = -\frac{x^4}{8c^3}$; and so on.

[1] Newton had learned this method of broken and negative exponents from Wallis, but the idea goes back as far as Oresme and Chuquet; see Selection II.2. Through the influence of Wallis and Newton the method was gradually adopted by other mathematicians. The notation $\sqrt{c:(\ )}$ indicates the cube root.

Figura 1. Extret de Struik (1986).

Notation

For ease of reading in the transcript below, Newton's seventeenth-century abbreviations and spelling have been replaced by their modern equivalents.

TRANSCRIPT

If *lab* is an Hyperbola; *cde*, *ck* its Asymptotes, *a* its vertex, and *cag* its axis; if *adck* is a square and *he* is parallel to *ad*, and $cd = 1$, and $de = x$, then $be = \frac{1}{1+x}$. If also, $ef = 1$, $eg = 1 + x$, $eh = 1 + 2x + x^2$ etc. (the progression continued is $1 + 3x + 3xx + x^3$, $1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$, $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$ etc). Then, shall the areas of those lines proceed in this progression. $* = adeb$, $x = adef$, $x + \frac{xx}{2} = adeg$, $adeh = x + \frac{2xx}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x + \frac{3xx}{2} + \frac{3x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, $x + \frac{4xx}{2} + \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ etc. As in this table. In which the first area is also inserted. The composition of which table may be deduced from hence; viz: The sum of any figure and the figure above it is equal to the figure following it. By which table it may appear that the area of the Hyperbola *adeb* is $x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10}$ etc.

x	$\times$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{xx}{2}$	$\times$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{x^3}{3}$	$\times$	1	0	0	1	3	6	10	15	21
$\frac{x^4}{4}$	$\times$	-1	0	0	0	1	4	10	20	35
$\frac{x^5}{5}$	$\times$	1	0	0	0	0	1	5	15	35
$\frac{x^6}{6}$	$\times$	-1	0	0	0	0	0	1	6	21
$\frac{x^7}{7}$	$\times$	1	0	0	0	0	0	0	1	7

Suppose that *adck* is a Square, *abc* a circle, *age* a Parabola, etc. and that $de = x$ and *ad* is parallel to $fe = 1 = bc$. And that the progression in which the lines *fe*, *be*, *ge*, *he*, *ie*, *ne*, etc. proceeds is 1, $\sqrt{1 - xx}$, $1 - xx$, $\overline{1 - xx}\sqrt{1 - xx}$, $1 - 2xx + x^4$, $\overline{1 - 2xx + x^4}\sqrt{1 - xx}$, $1 - 3xx + 3x^4 - x^6$, etc. Then will their areas *fade*, *bade*, *gade*, *hade*, *iade*, etc. be in this progression $x, *, x - \frac{xxx}{3}, *, x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, *, x - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{7}, *, x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$, etc: as in this table following in which the indeterminate terms are inserted.

x	$\times$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$-\frac{x^3}{3}$	$\times$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6
$\frac{x^5}{5}$	$\times$	1	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15
$-\frac{x^7}{7}$	$\times$	-1	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{3}{48}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{35}{16}$	4	$\frac{105}{16}$	10	$\frac{231}{16}$	20
$\frac{x^9}{9}$	$\times$	1	$\frac{35}{128}$	0	$-\frac{15}{384}$	0	$\frac{3}{128}$	0	$-\frac{5}{128}$	0	$\frac{35}{128}$	1	$\frac{315}{128}$	5	$\frac{1155}{128}$	15
$-\frac{x^{11}}{11}$	$\times$	-1	$-\frac{63}{256}$	0	$\frac{305}{3840}$	0	$-\frac{3}{256}$	0	$\frac{3}{256}$	0	$-\frac{7}{256}$	0	$\frac{63}{256}$	1	$\frac{693}{256}$	6
$\frac{x^{13}}{13}$	$\times$	1	$\frac{231}{1024}$	0	$-\frac{945}{46080}$	0	$\frac{7}{1024}$	0	$-\frac{5}{1024}$	0	$\frac{7}{1024}$	0	$-\frac{21}{1024}$	0	$\frac{231}{1024}$	1

The property of which table is that the sum of any figure and the figure above it is equal to the figure next after it save one. Also the numeral progressions are of these forms.

a	a	a	a
b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$
c	$b+c$	$a+2b+c$	$3a+3b+c$
d	$c+d$	$b+2c+d$	$a+3b+3c+d$
e	$d+e$	$c+2d+e$	$b+3c+3d+e$

Where the calculation of the intermediate terms may be easily performed. The area *abed* depends upon the 4th column 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{3}{48}$, etc. (which progression may be continued at pleasure by the help of this rule $\frac{0\times 1\times -1\times 3\times -5\times 7\times -9\times 11\times -13\times 15}{0\times 2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12\times 14\times 16\times 18}$ etc.) Whereby it may appear that, whatever the sine $de = x$ is, the area *abed* is $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} - \frac{7x^{11}}{2816} - \frac{21x^{13}}{13312} - \frac{11x^{15}}{10240}$ etc. (and the area *afb* is $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112}$ etc.) Whereby also the area and angle *adb* may be found.

Figura 2. Extret de Stedall (2009).

Newton i *De Analysi* (1669)

Et ſupponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſq; placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+p^3$	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0,06 \quad +1,2 \quad +6,0$
	$+10p$	$+1, \quad +10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642 \quad +11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

neglecto, & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ fere, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæſitam.

Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſecius reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hic factum fuit levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

Præterea notandum eſt quod in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1 = p$ veritati ſatis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxiſſem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem ; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſta ultimo reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

C Imo

Figura 3. Extret de *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Newton, 1669/1711).

Exercici: Donada l'equació "afectada" $y^3 + y + xy - x^3 - 2 = 0$ expresseu y com a sèrie de potències de *x* (partint del punt inicial *x* = 0).

Imo laborem plerumque minues præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cum opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix una cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propoſitæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri Coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p + 3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum iſta poſſit reſolvi in hanc formam

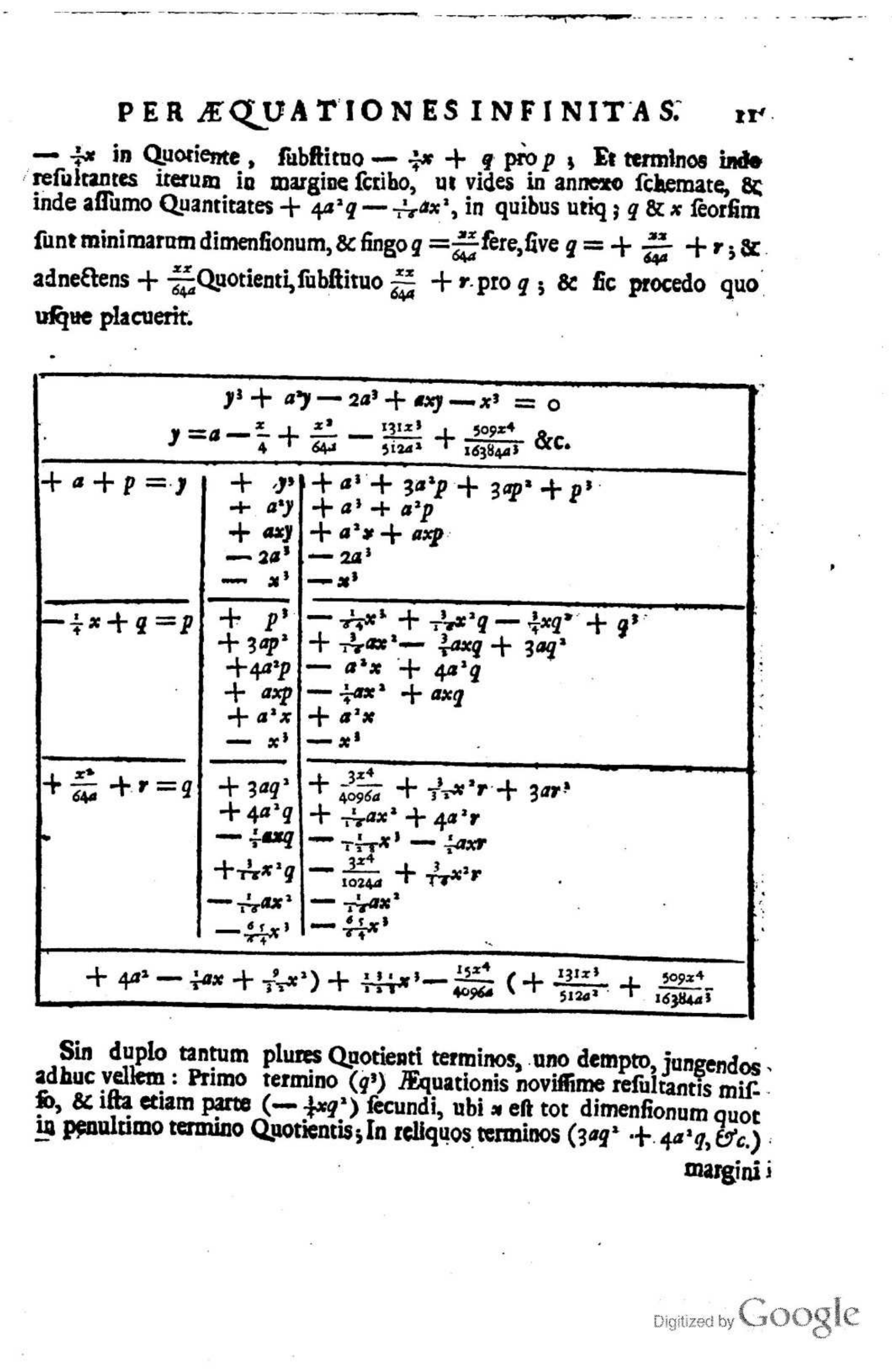
$\overline{\overline{\overline{y - 4} \times y + 5} \times y - 12} \times y + 17 = 0$. Æquatio nova ſic generabitur $\overline{p - 1} \times \overline{p + 3} = p^2 + 2p - 3$. et $p^2 + 2p + 2$ in $p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6$. et $p^3 + 5p^2 + 8p - 6$ in $p + 3 = p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18$. et $p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 = 0$, quæ quærebatur.

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, reſolvenda.

Primum inquiro valorem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio eſſe $+ a$. Itaque ſcribo $+ a$ in Quotiente, & ſupponens $+ a + p = y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus aſſumo $+ 4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo fere æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens

$-\frac{1}{4}x$



PER ÆQUATIONES INFINITAS. 11

$-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x+q$ pro p; Et terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+4a^2q-\frac{1}{16}ax^2$, in quibus utiq; q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & fingo $q=\frac{xx}{64a}$ fere, ſive $q=+\frac{xx}{64a}+r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a}+r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit.

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$$

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}-\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\ \&c.$$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x+4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$-\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\left(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſta etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2+4a^2q$, &c.)

margini

Figura 4. Extret de *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Newton, 1669/1711).

La sèrie de Taylor

1715: *Methodus incrementorum directa et inversa* de Brook Taylor (1685-1731)

TRANSLATION

PROPOSITION VII. THEOREM III.

Let z and x be two variable quantities, of which z is uniformly increased by a given increment $\underset{\cdot}{z}$*, and let* $n\underset{\cdot}{z} = v, v - \underset{\cdot}{z} = \grave{v}, \grave{v} - \underset{\cdot}{z} = \grave{\grave{v}}$*, and so on. Then I say that in the time that z increasing becomes* $z + v$*, x likewise increasing becomes* $x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\because}{x}\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} +$ etc.

DEMONSTRATION

x	$\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\because}{x}$	$\underset{::}{x}$	etc.
$x + \underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x}$	$\underset{\because}{x} + \underset{::}{x}$	etc.	
$x + 2\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x} + 2\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x} + 2\underset{\because}{x} + \underset{::}{x}$	etc.		
$x + 3\underset{\cdot}{x} + 3\underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\because}{x}$	$\underset{\cdot}{x} + 3\underset{\cdot\cdot}{x} + 3\underset{\because}{x} + \underset{::}{x}$	etc.			
$x + 4\underset{\cdot}{x} + 6\underset{\cdot\cdot}{x} + 4\underset{\because}{x} + \underset{::}{x}$ etc.	etc.				

The successive values of x by continued addition, brought together, are x, $x + \underset{\cdot}{x}$, $x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$, $x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\because}{x}$, etc as is clear from the working shown in the adjoined table. But in these values of x the numerical coefficients of the terms x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, etc are formed in the same way as the coefficients of the corresponding terms in powers of binomials. And (by the *Newtonian* theorem) if the index of the power is n, the coefficients will be 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. Therefore in the time that z increasing becomes $z+n\underset{\cdot}{z}$, which is $z + v$, x will become equal to the series $x + \frac{n}{1}\underset{\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\underset{\because}{x}$ etc. But $\frac{n}{1} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z}}{\underset{\cdot}{z}} =\right) \frac{v}{\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-1}{2} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - \underset{\cdot}{z}}{2\underset{\cdot}{z}} =\right) \frac{\grave{v}}{2\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-2}{3} = \left(\frac{n\underset{\cdot}{z} - 2\underset{\cdot}{z}}{3\underset{\cdot}{z}} =\right) \frac{\grave{\grave{v}}}{3\underset{\cdot}{z}}$, etc. [23] Whence in the time that z increasing becomes $z + v$, in the same time x increasing becomes $x + \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\because}{x}\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3} +$ etc.

COROLLARY I

And keeping $\underset{\cdot}{z}$, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\because}{x}$, etc. the same, but changing the sign of v, in the time that z decreasing becomes $z - v$, in the same time x decreasing becomes $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} - \underset{\because}{x}\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$, etc., or using our notation $x - \underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}} + \underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v v_{\prime}}{1.2\underset{\cdot}{z}^2} + \underset{\because}{x}\frac{v v_{\prime} v_{\prime\prime}}{1.2.3\underset{\cdot}{z}^3}$ etc. with $\grave{v}$, $\grave{\grave{v}}$, etc. changed into $-v_{\prime}$, $-v_{\prime\prime}$, etc.

COROLLARY II

If instead of the increasing increments there are written fluxions proportional to them, now making all $\grave{\grave{v}}$, $\grave{v}$, v, $v_{\prime}$, $v_{\prime\prime}$, etc. equal, in the time that z flowing uniformly becomes $z+v$, x will become $x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3}$ etc. or changing the sign of v, in the time that z decreasing becomes $z-v$, x decreasing will become $x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3}$ + etc.

Figura 5. Extret de Stedall (2008).

Anticipada per:

1670-71: James Gregory (1638-1675)

1691-92: Isaac Newton

1694-95: Gottfried W. von Leibniz (1646-1716) i Johann I Bernoulli (1667-1748)

1708: Abraham de Moivre (1667-1754)

1717: James Stirling (1692-1770)

La sèrie de Maclaurin

1742: *A Treatise of Fluxions*

de Colin Maclaurin (1698-1746)

Maclaurin's series

from Maclaurin, *A treatise of fluxions*, 1742, II, 610

751. The following theorem is likewiſe of great uſe in this doctrine. Suppoſe that y is any quantity that can be expreſſed by a ſeries of this form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. where A, B, C, &c. repreſent invariable coefficients as uſual, any of which may be ſuppoſed to vaniſh. When z vaniſhes, let E be the value of y, and let $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\dddot{E}$, &c. be then the reſpective values of $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. z being ſuppoſed to flow uniformly. Then $y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2 \dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3 \dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dot{z}^4} +$ &c. the law of the continuation of which ſeries is manifeſt. For ſince $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. it follows that when $z = o$, A is equal to y; but (by the ſuppoſition) E is then equal to y; conſequently $A = E$. By taking the fluxions, and dividing by $\dot{z}$, $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = B + 2Cz + 3Dz^2 +$ &c. and when $z = o$, B is equal to $\frac{\dot{y}}{\dot{z}}$, that is to $\frac{\dot{E}}{\dot{z}}$. By taking the fluxions again, and dividing by $\dot{z}$, (which is ſuppoſed invariable) $\frac{\ddot{y}}{\dot{z}^2} = 2C + 6Dz +$ &c. let $z = o$, and ſubſtituting $\ddot{E}$ for $\ddot{y}$, $\frac{\ddot{E}}{\dot{z}^2} = 2C$, or $C = \frac{\ddot{E}}{2\dot{z}^2}$. By taking the fluxions again, and dividing by $\dot{z}$, $\frac{\dddot{y}}{\dot{z}^3} = 6D +$ &c. and by ſuppoſing $z = o$, we have $D = \frac{\dddot{E}}{6\dot{z}^3}$. Thus it appears that $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. $= E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2 \dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3 \dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dot{z}^4} +$ &c. This propoſition may be likewiſe deduced from the binomial theorem.

Figura 6. Extret de Stedall (2008).

Aplicació: determinació màxims-mínims

§58. When the firſt fluxion of the ordinate vaniſhes, if at the ſame time its ſecond fluxion is poſitive, the ordinate is then a *minimum*, but is a *maximum* if its ſecond fluxion is then negative; that is, it is leſs in the former, and greater in the latter caſe than the ordinates from the adjoining parts of that branch of the curve on either ſide. This follows from what was ſhewn at great length in *Chap.* 9. *B.* I. or may appear thus. Let the ordinate AF = E, AP = x, and the baſe being

FIG. 319. ſuppoſed to flow uniformly, the ordinate PM = (art. 751.) $E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3}$ + &c. let Ap be taken on the other ſide of A equal to AP, then the ordinate $pm = E - \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} - \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3}$ + &c. Suppoſe now $\dot{E} = 0$, then PM $= E * + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2}$ — &c. and $pm = E * + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2}$ — &c. Therefore if the diſtances AP and Ap be ſmall enough, PM and pm will both exceed the ordinate AF when $\ddot{E}$ is poſitive; but will be both leſs than AF

AF if $\ddot{E}$ be negative. But if $\ddot{E}$ vaniſh as well as $\dot{E}$, and $\dddot{E}$ does not vaniſh, one of the adjoining ordinates PM or pm ſhall be greater than AF, and the other leſs than it; ſo that in this caſe the ordinate is neither a *maximum* nor *minimum*. We always ſuppoſe the expreſſion of the ordinate to be poſitive.

Figura 7. Extret de *A Treatise of Fluxions* (Maclaurin, 1742; II).

I després, què?

- 1748: *Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler (1707-1783)
- Convergència de sèries: D'Alembert (1761) i Lagrange (1797)
- Sèries de Fourier (1822)

Referències

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag

FEIGENBAUM, L. (1985) Brook Taylor and the method of increments. *Archive for History of Exact Sciences*, 34 (1-2): 1-40.

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: Harper Collins, 2a ed. 1998.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press.

STRUIK, D. J. (ed.) (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press [1a ed., 1969].

7. EL CÀLCUL SEGONS LEIBNIZ

1646 Gottfried Wilhelm von Leibniz neix a Leipzig (Alemanya).

1661 Ingressa a la Universitat de Leipzig, on es dedica a la lògica, a la filosofia i al dret (BA 1663; Master 1665).

1666 *Dissertatio de arte combinatoria*.

1667 Doctor en Filosofia per la Universitat d'Altdorf (Nuremberg).

1672 Al servei de l'Elector de Mainz, missió diplomàtica a Paris.

1672-1676 Estada a Paris. Coneix Christian Huygens, qui l'encoratja a fer un estudi més profund de les matemàtiques. El 1673 Leibniz visità Londres, on va aprendre molt sobre sèries infinites i comprà una còpia de les *Lectiones geometricae* de Barrow. Un cop de tornada a París, es posà a estudiar Cavalieri, Torricelli, Gregory of St. Vincent, Roberval, Pascal, Descartes, Wren, James Gregory, Sluse, o Hudde. Construeix màquina calculadora.

1673 Escollit *fellow* de la Royal Society de Londres.

1676 Torna a Alemanya, on servirà fins la seva mort l'Elector de Hanover.

1684 *Nova methodus pro maximis et minimis...*

1686 *De Geometria recondita...*

1712 *Commercium Epistolicum*, Newton

1714 *Historia et origo calculi differentialis*, Leibniz

1716 Mor i al seu enterrament només assisteix el seu secretari.

1717 Homenatge de l'Académie des Sciences de Paris.

1863 K. I. Gerhardt edita *Mathematische Schriften*.

Sumes i diferències

Relació inversa de sumes i diferències donada una seqüència de nombres.

Triangle aritmètic i triangle harmònic.

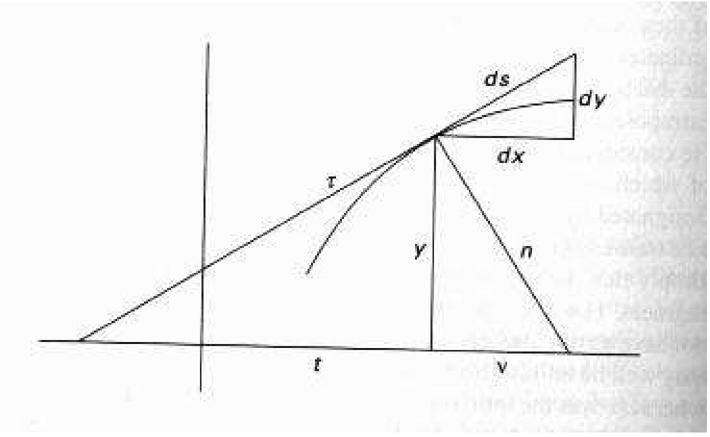
Huygens:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\ ?$$

Solució Leibniz: 2 a partir del triangle harmònic.

Triangle diferencial i teorema de la transmutació

Llegint el *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, Leibniz observà la suma i la diferència en el triangle característic: mitjançant seqüències de variables d'un polígon finit, sumes relacionades amb quadratures, diferències amb tangents. Així se n'adona que les quadratures i les tangents són operacions recíproques. Quan el polígon té infinits costats, infinitament petits, entén la corba com un polígon infinitangular. La corba *és* el polígon.

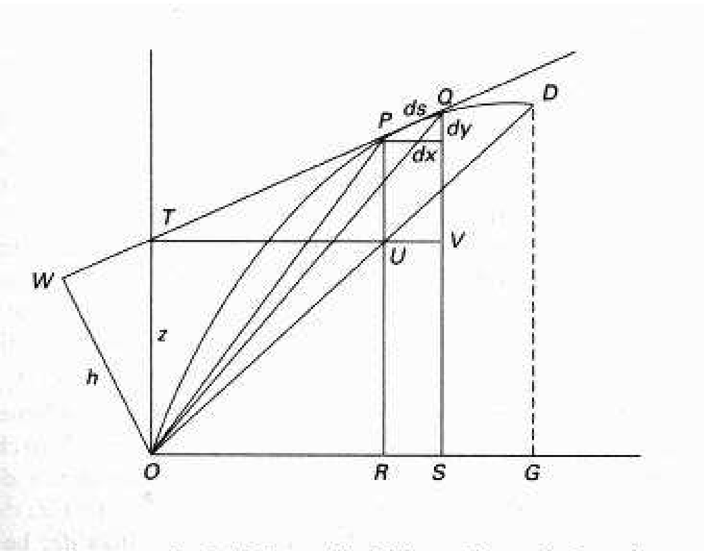


a) $yds = ndx$ (per calcular superfícies de revolució)

b) $yds = \tau dy$ (per rectificar una corba)

c) $ydy = vdx$ → $v = y\frac{dy}{dx}$. Així, per trobar l'àrea sota corba d'ordenada *z* només cal trobar corba *y* la subnormal *v* de la qual sigui *z*: $z = y\frac{dy}{dx}$

Problema de càlcul d'àrea = problema invers de les tangents.



Importància:

a) Estableix relació inversa entre el problema de la tangent (perquè *z* ve donada en termes de la tangent) i el problema de la quadratura.
b) Integració per parts, on la integral de la quadratriu, *z*, és més senzilla que la integral de la corba *y*.

La primera publicació sobre el càlcul dels diferencials

Dos articles breus a *Acta Eruditorum*:

1684 *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationals quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* [Un mètode nou per als màxims i els minims, així com per a les tangents, que no s'atura davant les quantitats fraccionàries o irracionals, i és un gènere singular de càlcul per a aquests problemes]

dx com a segment de recta arbitrari i finit

Regla del producte i eliminació de *dx*·*dy*

Ordre superior: A partir de la seqüència de diferències, es poden tornar a estudiar les diferències. La variable "diferència" *és* la seqüència de tots els valors que recorre. *x*, *y*, ... són variables que recorren infinites seqüències de valors infinitament propers. *dx*, *dy*, ... són variables noves, anomenades *diferencials*, infinitament petites. L'ordre superior queda justificat de la manera següent: la seqüència diferencial corresponent a la seqüència de diferencials de primer ordre (no tindria sentit parlar de *ddx* si només es considerés un *dx*, però *dx* és una variable, que cobreix una seqüència ordenada). $d^k y$ té mateix ordre que $(dx)^k$, que és infinitament més petit que $(dx)^{k-1}$.

Equacions diferencials: Les relacions entre variables infinitesimals es representava mitjançant equacions diferencials o mitjançant proporcions diferencials (especialment, en els problemes relacionats amb la física i, en particular, la mecànica, atès que aquesta: implica forces i canvis de moviment, per tant, els infinitesimals). Problema de Debeaune al final de *Nova Methodus* (proposat per Debeaune a Descartes en 1639: trobar una corba la subtangent de la qual sigui constant).

1686 *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* [Sobre una geometria extremadament oculta i l'anàlisi dels indivisibles i infinits]

Símbol de la integral per primer cop a *De Geometria recondita*.

La indeterminació dels diferencials: l'elecció de la "progressió de les variables"

Els costats del polígon infinitangular no tenen perquè ser iguals. Això depèn de 1) la naturalesa de la corba, i 2) la progressió de les variables. No és acceptable fixar *dx* constant, va contra la llibertat i la generalitat del mètode de Leibniz. Els diferencials de primer ordre no depenen de la progressió, però els d'ordre superior sí. I existeixen proporcions diferencials amb diferencials de primer ordre que depenen de la progressió. En alguns problemes l'especificació de la variable amb diferencial constant és crucial. Si s'escull la progressió de manera adient, es poden simplificar els càlculs, que és un dels avantatges de l'elecció de la progressió. Segons Johann Bernoulli, una fórmula és incompleta quan *dx*, *dy*, ... es prenen com a constants (quan s'escull una progressió). Si no, s'anomena completa.

Els debats sobre la naturalesa dels infinitesimals:

a) L'atac de Nieuwentijdt (1694-1695)

En el seu article de 1684, després de donar les regles de càlcul, Leibniz menciona de manera casual que els diferencials es poden considerar proporcionals als increments o decrements momentanis de les variables, els infinitesimals. A continuació diu que traçar una tangent és traçar una recta que uneix dos punts de la corba, amb distància infinitament petita entre elles, o bé que és un costat del polígon infinitangular. Aquesta distància infinitament petita es pot expressar mitjançant un diferencial (*dv*) o bé mitjançant una relació amb aquest (per exemple, a partir de la tangent). Però Leibniz en general evita la definició i usa directament els diferencials com a infinitesimals. Justifica els diferents ordres d'infinit referint-se als infinits rangs del seu sistema filosòfic de mònades (idealisme metafísic).

Leibniz era conscient que s'havien de contestar dues qüestions:

1) l'existència "de fet" dels infinitesimals;

2) la validesa de les solucions de problemes resolts via les regles del càlcul.

Pel que fa a la primera qüestió, Leibniz evita qualsevol mena de discussió sobre la naturalesa dels infinitesimals. Però Bernard Nieuwentijdt (1654-1718) ataca la manca de claredat del treball de Newton i l'existència dels diferencials d'ordre superior de Leibniz, tot i admetre la validesa dels resultats. Aleshores, el 1695, Leibniz respon que l'excés d'escrúpols no hauria de fer refusar els fruits de la seva invenció. Leibniz justifica el seu càlcul segons dues línies:

- El càlcul nou no és res més que un llenguatge abreujat per a les demostracions per exhaustió d'Arquimedes.
- La llei de continuïtat, que és la que justifica la transició de "ficcions" a "realitat". Considera primer *dx*, *dy* diferències finites, i després extrapola al cas infinitesimal.

En canvi, en referència a la segona qüestió, usa l'èxit del mètode a l'hora de justificar el càlcul: l'aplicació de les regles adients dóna lloc a resultats correctes. Leibniz destaca la naturalesa algorísmica del nou mètode.

b) El debat Rolle-Varignon a l'Académie des Sciences (1700-1706)

El càlcul leibnizià va ser difós a través dels germans Bernoulli. En particular, va ser Johann Bernoulli (1667-1748) qui el va introduir a França, en cercles relacionats amb Malebranche. Els primers textos sobre el nou càlcul van aparèixer gràcies a l'Académie Royale des Sciences, a partir de 1693, en els *Registres des Procès-Verbaux des Séances de l'Académie royale des Sciences*, signats per L'Hospital, Varignon, Sauveur i de Lagny. El 1696 el Marquès de L'Hospital (1661-1704) publica l'*Analyse des infiniment petits*. La publicació del llibre de L'Hospital provocà que el 17 de juliol de 1700 Michel Rolle (1652-1719) comencés un debat sobre el càlcul diferencial, en el si de l'Académie. Pierre Varignon (1654-1722) va decidir defensar el nou càlcul contra l'atac de Rolle. La crítica de Rolle es basà en dos punts:

- La manca de rigor lògic dels conceptes i principis fonamentals.
- Els errors produïts pel nou càlcul.

La polèmica prengué un caràcter més aviat personal (quarta i cinquena memòries, 1701). El 3 de setembre de 1701 es nomenà una comissió, formada pel pare Gouye, Cassini i LaHire, per acabar amb el debat. Després d'uns mesos de calma, el 13 d'abril de 1702 Rolle recomençà el debat en el *Journal des Sçavans* (dirigit pel pare Gouye). Saurin va substituir Varignon en la defensa del càlcul leibnizià. Els exemples van canviar però els principis d'argumentació es conservaren. Aquesta segona fase durà fins al 1705-1706.

Referències

BLAY, M. (1986). Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley. *Revue d'histoire des sciences*, 39: 223-253.

BOS, H. (1993). The Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus. In Bos, H. (1993). *Lectures in the History of Mathematics*. Providende, Rhode Island: American Mathematical Society: 83-99.

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag.

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: Harper Collins, 2a ed. 1998.

LORENZO, J. de & MARTÍN, T. (1994). *Análisis infinitesimal. Gottfried Wilhelm Leibniz*. Madrid: Tecnos.

LA TRILOGIA D'EULER

Leonhard Euler (Basilea, 1707 - Sant Petersburg, 1783)

1723 Màster de filosofia, després d'haver comparat i contrastat les idees filosòfiques de Descartes i Newton.

Teologia, matemàtiques i Johann Bernoulli. 

1726 Article sobre les corbes isòcrones en un medi resistent.

1727 Article sobre trajectòries recíproques, i un altre sobre la millor manera de disposar els pals d'un vaixell, que envià al concurs de l'Acadèmia de París, obtenint el segon premi.

1727-1741 Sant Petersburg: 1er divisió de fisiologia, 2on divisió físico-matemàtica.

1727-1730 Lloctinent mèdic a l'armada russa, quan obtingué la plaça de professor de física a l'acadèmia, esdevenint membre amb dedicació completa. En aquest període, a més de les obres matemàtiques, dugué a terme projectes estatals sobre cartografia, educació, magnetisme, màquines, motors, construcció de vaixells.

1735 Perd completament la visió d'un ull.

1738, 1740 Guanya el Gran Premi de l'Acadèmia de París.

1741-1766 Acadèmia de Ciències de Berlin. Director de matemàtiques, quan president de la qual era Maupertuis. Altres tasques, a més de les matemàtiques: supervisió de l'observatori i el jardins botànics, selecció de personal, comptabilitat, cartografia, funcionament del sistema hidràulic,... Euler escriu al voltant de 380 articles i llibres sobre càlcul de variacions, càlcul d'òrbites planetàries, artilleria, balística, anàlisi, astronomia, navegació, càlcul diferencial...

1766-1783 Sant Petersburg.

1771 Pèrdua total de la visió. Degut a la seva memòria i a l'ajuda dels seus fills i de dos membres de l'Acadèmia produirà gairebé la meitat de tota la seva obra.

Creà gran part de l'anàlisi i revisà gairebé totes les branques de les matemàtiques pures conegudes llavors, completant-les, afegint-hi demostracions i donant-li una forma consistent: teoria de nombres, anàlisi infinitesimal (incloent equacions diferencials i càlcul de variacions), mecànica racional, ... Són importants les seves aportacions a la **notació matemàtica**: $f(x)$ per indicar funció de *x*; *e* per a la base del logaritme neperià; *i* per a la unitat imaginària...

Algunes de les seves **obres**:

Mechanica (1736-37); *Methodus inveniendi lineas curvas...* (1744); *Introductio in analysin infinitorum* (1748); *Institutiones calculi differentialis* (1755); *Theoria motus corporum solidorum* (1765); *Institutiones calculi integralis* (1768-70); *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1768-72); *Einleitung zur Algebra* (1770).

La "trilogia analítica"

El 1748 publica a Berlin l'***Introductio in analysin infinitorum***, una exposició de l'anàlisi algèbrica, com a estudi de funcions. Aquesta obra basa el càlcul en la teoria de funcions elementals, en lloc de les corbes geomètriques. La primera part conté el que es troba en els llibres de text moderns sobre àlgebra, teoria d'equacions i trigonometria. En la part d'àlgebra destaca l'expansió de funcions en sèrie i la sumació d'una sèrie donada (tenint en compte la convergència). Quant a la trigonometria, Euler és el primer en tractar el sinus, el cosinus, ... com a funcions, i no com a cordes. Considera la trigonometria com una branca de l'anàlisi, i no un apèndix de l'astronomia o la geometria. La segona part està dedicada a la geometria analítica. Comença per dividir les corbes en algèbriques i transcendents i estableix una sèrie de proposicions per a corbes algèbriques, que aplicarà a la resolució d'equacions. També estudia superfícies (equació, transformació de coordenades en l'espai, curvatura).

El 1755 apareix ***Institutiones calculi differentialis***. En la primera part enuncia les regles per diferenciar funcions d'una o més variables, així com per trobar els diferencials d'ordre superior. En la segona part, presenta les aplicacions del càlcul (anàlisi de quantitats finites, sèries, màxims i mínims); a l'àlgebra (solució d'equacions, suma de sèries, màxims/mínims, estudi d'indeterminacions); i a la geometria (tangents, curvatura). El capítol tercer està dedicat als infinits i als infinitament petits. Una quantitat tan gran com es vulgui, que creix sense fi, a la qual sempre se li pot afegir un creixement, és una quantitat que *creix infinitament*. Una quantitat pot decréixer fins a desaparèixer, fins a esdevenir 0. Una quantitat d'aquest tipus s'anomena *infinitament petita*, és una quantitat evanescent i, en conseqüència, és *zero*. És una quantitat més petita que qualsevol quantitat donada. Entre dos zeros no hi ha cap diferència, si els comparem aritmèticament. En canvi, si es fa la comparació a nivell geomètric, aleshores dos zeros no són sempre iguals (per exemple: com que $n \cdot 0 = 0$ llavors $n:1 = 0:0$, *n* i 1 no són iguals, no es pot canviar una per l'altra). El càlcul diferencial s'ocupa de calcular les proporcions geomètriques de dues quantitats infinitament petites. Donat que una quantitat infinitament petita és zero, si a una quantitat finita se li afegeix o se li treu una quantitat infinitament petita, aquesta quantitat ni creix ni decreix, tant a nivell aritmètic com geomètric. Les quantitats infinitament petites desapareixen respecte les finites. Euler afirma que aquest resultat és vàlid a nivell geomètric, de l'estil dels escrits dels Antics. Si $dx = 0, dx^2 = 0, dx^3 = 0$, etc. aleshores dx^2 desapareix respecte dx.

El primer capítol de les *Institutiones calculi differentialis* està dedicat a les diferències finites. Prenent com a primer terme *x* genera una progressió aritmètica amb diferència *w*. Si *y* és una funció de *x*, l'avalua en els punts generats aritmèticament a partir de *x*. S'obté una nova sèrie de valors: $y, y^{I}, y^{II}, y^{III},\ldots$. La sèrie de les diferències és:

$$\Delta y = y^{I} - y, \Delta y^{I} = y^{II} - y^{I},\ldots$$

Si es calculen les diferències d'un terme d'aquest nova sèrie amb el següent s'obté la sèrie de les diferències de les diferències (o segones diferències):

$$\Delta\Delta y = \Delta y^{I} - \Delta y,\ldots,$$

i així es van generant les sèries de les diferències terceres, quartes, etc. Mostra la relació entre els coeficients de les diferències d'ordre superior i els del *binomi*. Per trobar les diferències de funcions transcendents (logaritme, exponencial i trigonomètriques) recorre al desenvolupament en sèrie de les mateixes, que diu que ja s'ha vist en la seva obra *Introductio in analysin infinitorum*. I al quart capítol extrapola del cas finit al cas infinitament petit.

Institutiones calculi integralis (1768-1770): Integració com a inversa de la diferenciació, més que determinació d'àrees. Tècniques d'integració i resolució d'equacions diferencials i equacions en derivades parcials. Sense aplicacions, anàlisi pura.

Emergència del concepte de *funció*

- *Definició de funció de Johann Bernoulli (1718)*

1694-1698 A les seves cartes Johann Bernoulli i Leibniz comencen a utilitzar el terme *functio* (*fonction*). En relació a problemes isoperimètrics (corbes amb la mateixa longitud). "Funcions" com a quantitats, "funció" com a regla. Johann i la primera definició publicada de funció a "Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problemes sur les isopérimètres" (a *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de Paris*, 1718):

> *Définition.* On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

[Notació: φx]

Implícitament, en el sentit d'expressions analítiques.

- *Definició de funció d'Euler (1748)*

> 4. Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica composta de qualsevol forma a partir d'aquesta quantitat variable i nombres o quantitats constants.
>
> 5. Per tant una funció d'una quantitat variable serà també una quantitat variables.
>
> 7. Les funcions es divideixen en algebraiques i transcendents; les primeres es composen a partir d'operacions algebraiques exclusivament, però les darreres són aquelles en què es troben implicades operacions transcendents.
>
> 8. Les funcions algebraiques es subdivideixen en racionals i irracionals: les primeres són aquelles on la quantitat variable implica no irracionalitat; però les darreres on símbols d'arrel afecten la quantitat variable. (…) Aquí es pot distingir de forma convenient entre funcions explícites i implícites [irracionals].

[Notació: $f(x)$]

- *Funcions contínues i discontínues (mixtes)*

> 9. Clarament una corba és contínua si s'estableix de tal manera, que el seu caràcter s'expressa per una única funció d'x. Però si la corba s'estableix tal que, les diverses porcions d'ella (…)

s'expressen per funcions d'x diferents, de manera que si la porció *BM* s'ha definit per una funció, aleshores la porció *MD* és descrita per una altra, corbes d'aquest tipus s'anomenen discontínues o mixtes, també irregulars, perquè no es formen segons una llei constant, sinó que estan compostes per porcions de diverses corbes contínues.

- *Definició de funció d'Euler (1755)*

 ..., les quantitats que depenen d'aquesta forma d'altres, de forma que si la primera canvia, les altres també pateixen canvi, s'anomenen habitualment funcions... Així si x denota una quantitat variable, aleshores totes les quantitats que depenen de qualsevol forma de x, o estan determinades per ella, s'anomenen funcions d'ella...

Canvi de punt de vista arran de la controvèrsia sobre el problema de la corba vibrant (equació d'ona) descoberta per D'Alembert (1747):

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

Quines funcions satisfan aquesta equació?

- D'Alembert: Ha de ser possible aplicar les regles de diferenciació de Leibniz.
- Euler: I què passa amb aquelles corbes amb pics o juntes estranyes, que no són diferenciables a tot arreu?

Definicions de *funció* posteriors a Euler

Lacroix (1810)

Qualsevol quantitat el valor de la qual depèn d'una o més quantitats s'anomena una funció d'aquestes darreres, tant si un coneix com si ignora quines operacions són necessàries per arribar des de la darrera a la primera.

Lagrange (1813)

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de càlcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Cauchy (1821)

Quan les quantitats variables estan lligades de manera que, quan es dóna el valor d'una d'elles, es pot deduir els valors de les altres, considerem normalment que aquestes diverses quantitats estan expressades mitjançant una d'elles que pren el nom de variable independent; i les variables restants, expressades a partir de la variable independent, s'anomenen funcions d'aquesta variable.

Fourier (1822)

En general, la funció $f(x)$ representa una successió de valors o ordenades cadascuna de les quals és arbitrària. Donant una infinitat de valors a l'abscissa x, hi ha un nombre igual d'ordenades $f(x)$. Tots tenen de fet valors numèrics, tant positius com negatius com nuls. No considerem aquestes ordenades com lligades a una llei comuna; es succeeixen mútuament de qualsevol manera, i cadascuna d'elles es dóna com si fos una única quantitat.

Heine (1872)

Una funció uni-valuada d'una variable x és una expressió que per a tot valor racional o irracional de x està definida de forma única.

Dedekind (1888)

Una funció Φ sobre un conjunt S és una llei segons la qual a cada element determinat s de S correspon un cosa determinada que s'anomena transformada de s i que es denota $\Phi(s)$.

Actualment:

Donats dos conjunts A i B, una funció entre ells és una associació f que a cada element d'A li assigna un únic element de B.

Exercicis Trilogia Analítica d'Euler

1. Del capítol VII d'*Introductio in analysin infinitorum*, qui és *k*? On i com apareix el criteri del nombre *e* per a calcular límits de tipus 1^{∞}?

2. Del capítol VIII d'*Introductio in analysin infinitorum*, §§138-140, analitzeu i discutiu l'expressió de l'arctangent. Partint de la diferencial de l'arcsinus i tenint en compte que si y és l'arctangent de x aleshores $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Del capítol IV d'*Institutiones calculi differentialis*:

§§ 112-114; 120-123: Què és segons Euler el càlcul diferencial? Quin és l'estatus dels seus diferencials?

§§115-117: Quina visió té del càlcul de Newton? I de les relacions entre els "anglesos" i el Continent?

§§124-128;131-135: Què són els diferencials d'ordre superior? Com es poden determinar?

§§139-141: Què és el càlcul integral per a Euler?

Del càlcul diferencial d'Euler, què us "recorda" a Leibniz? Què us "recorda" a Newton?

4. Del capítol V d'*Institutiones calculi integralis*, trobeu la solució general de l'edo $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$.

Referències

BOTTAZZINI, U. (1986) *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York [etc.]: Springer-Verlag.

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York [etc.]: Springer-Verlag.

EULER, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (traducció anglesa de J. D. Blanton: *Euler. Introduction to analysis of the infinite.* New York [etc.] : Springer, cop. 1988-1990).

EULER, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis* (traducció anglesa de J. D. Blanton: *Euler. Foundations of differential calculus.* New York [etc.] : Springer, cop. 2000).

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (1998). *The Norton History of the Mathematical Sciences*. New York [etc.]: Norton.

STEDALL, J. (2008). *Mathematics emerging. A sourcebook 1540-1900.* Oxford: Oxford University Press.

YOUSKEVITCH, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19^{th} century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16 (1): 37-85.

LA MATEMÀTICA ÍNDIA

Mònica Blanco

MA3 Departament de Matemàtica Aplicada III

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

CONTINGUTS

1. UNA MICA D’HISTÒRIA SOBRE LA HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA ÍNDIA
2. SISTEMA NUMERAL POSICIONAL I ÚS DEL ZERO
3. RESOLENT EQUACIONS: ANÀLISI INDETERMINADA
4. SÈRIES DE POTÈNCIES I FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

1. UNA MICA D'HISTÒRIA SOBRE LA HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA ÍNDIA

- Eurocentrisme (o greco-centrisme?):

  – La matemàtica occidental, o **Eurocèntrica**, té les seves arrels a la tradició racional i racionalitzadora grega.
  – En canvi, la **matemàtica oriental, d'arrel no grega**, s'origina com una ciència pràctica per facilitar el còmput del calendari, l'administració de les collites, l'organització dels treballs públics i el cobrament dels impostos.
  – A diferència de la matemàtica occidental, la matemàtica oriental, basada en l'aritmètica pràctica i la medició, és molt menys teòrica i ofereix tècniques numèriques, geomètriques i algèbriques molt més idònies que les pròpies de la matemàtica occidental, o més creatives, adaptades al context en què es van originar.

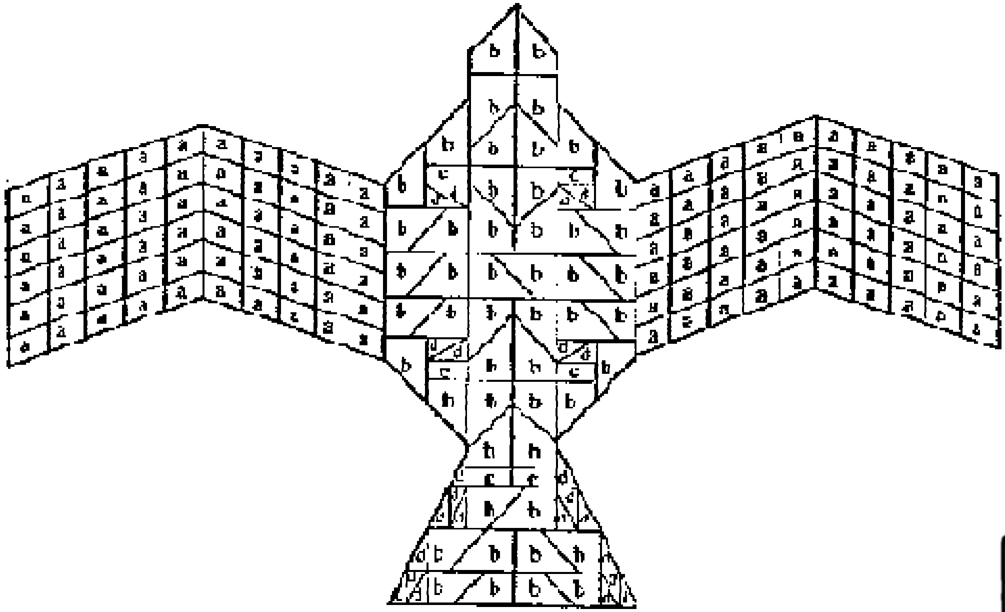
- Contraposició matemàtica grega – matemàtica índia

- Transmissió d'idees matemàtiques des de i cap a l'Índia:

  Mesopotàmia, Grècia, Xina, Islam

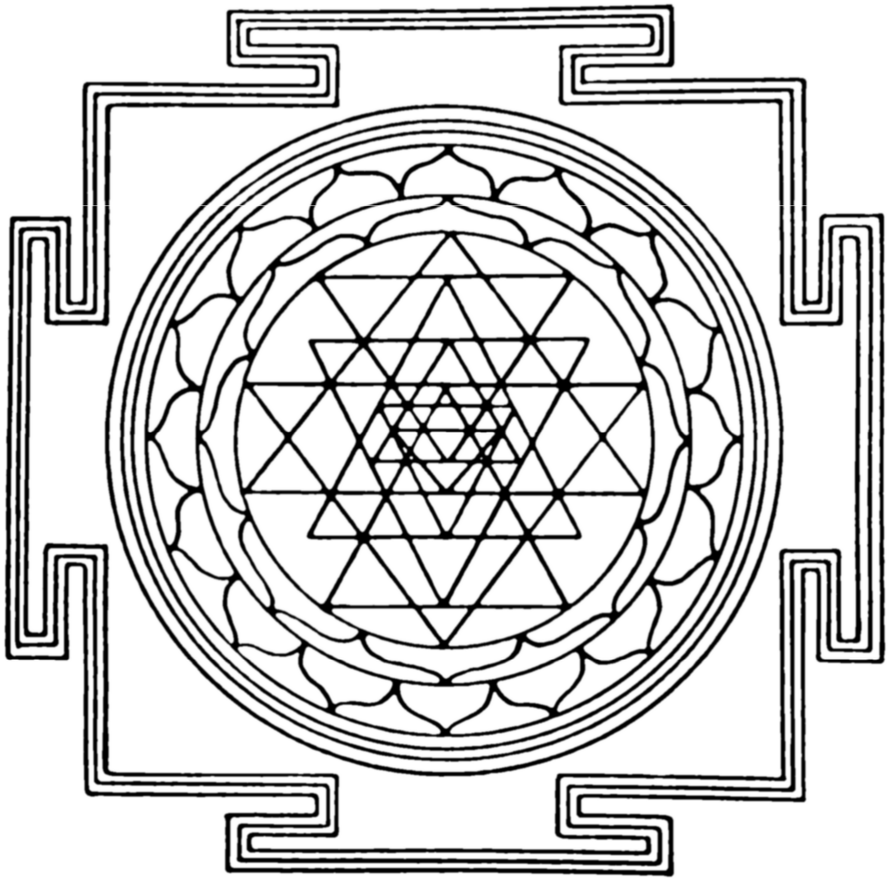
- Breu cronologia

Període	Fets històrics rellevants	Matemàtiques
3000 - 1500 aC	• Civilització Harappa (Vall de l'Indo). • Escriptura no desxifrada.	• Pesos, dissenys artístics. • Tecnologia dels maons (lligada a la construcció d'altars vèdics en el període següent).
1500-500 aC	• Invasió de tribus àries. • Formació de la civilització Hindú. •*Sutras* (regles expressades com aforisme o vers) → *Vedas* i *Upanishads* (escriptures sagrades). • Sistematització del Sànscrit.	•*Vedangas* (fonètica, gramàtica, etimologia, metronímia, astronomia i rituals) i *Sulbasutras* (construcció i geometria d'altars). • Numerals "literals", astronomia, aritmètica. • Desenvolupament matemàtic lligat a desenvolupament lingüístic. • Matemàtics: Baudhayana, Apastamba, Katyayana.



Altar vèdic amb forma de falcó (*Sulbasutras*)

Sriyantra i la meditació tàntrica



Període	Fets històrics rellevants	Matemàtiques
500 - 200 aC	• Establiment dels estats indis. • Budisme i Jainisme (originats a partir dels *Upanishads*). • Contactes amb Pèrsia. •Alexandre el Gran. •Imperi Mauryan (regnat d'Asoka i expansió del Budisme).	• Al principi matemàtiques vèdiques, fins a desaparició dels sacrificis rituals. • Matemàtiques Jaina: teoria de nombres, permutacions i combinacions, teorema del binomi. • Astronomia.
200 aC - 400 dC	• Invasions estrangeres. • Contactes culturals amb Àsia occidental i món hel.lènic. • Imperi Kushan (nord), Pandyas (sud), Bactriana-Pèrsia (Punjab).	• Manuscrit Bakhshali (~200-400 dC?). • Regles d'operacions matemàtiques, notació decimal posicional, primer ús del zero, àlgebra, arrels quadrades, com representar incògnites i signes negatius.

Període	Fets històrics rellevants	Matemàtiques
400 -1200	• Guptas imperials. • Moment àlgid del desenvolupament indi a ciència, filosofia, medicina, lògica, gramàtica i literatura. • Expansió cap al món àrab.	Període Clàssic ❑ Aryabhata I (476-) *Aryabhatiya (~* 499) ❑ Brahmagupta (598-) *Brahma Sputa Siddhanta* (628) ❑ Mahavira (~ 850) *Ganita Sara Samgraha*, no astrònom! ❑ Bhaskara II (Bhaskaracharya) (1114-) *Lilavati*, *Bijaganita*, *Siddhanta Siromani* (~ 1150)

Període	Fets històrics rellevants	Matemàtiques
1200 - 1600	• Primeres dinasties islàmiques. • Naixement del Sikhisme. • Regne hindú de Vijaynagar (Sud).	• Decadència de les matemàtiques del Nord. • Emergència de l'escola de Kerala (Sud) . • Anàlisi i sèries infinites (300 anys abans que a Europa). • Escola de Kerala: ❑ Madhava de Sangamagramma (1340-1425) ❑ Nilakantha Somayaji (1445-1545) *Tantra Samgraha*

Manuscrit Bakhshali

Brahmagupta

Bhaskara II
Mahavira

Madhava
Nilakantha

Aryabhata

Lectors dels textos matemàtics?

- Grups socials:
  - Sacerdots hindús (professions educades).
  - Guerrers (nobles i governants).
  - Comerciants.
  - Artesans.
- Sacerdots com a autors dels textos matemàtics:
  - Astrònoms, astròlegs, matemàtics.
  - Calendaris i prediccions astrològiques.
- Professions “hereditàries”: educació dins la família.
  - *Escola* com a associació voluntària de professors i estudiants, basada sobre els treballs del fundador.
- Públic femení:
  - Manteniment de la llar.
  - Símbol de refinament (aritmètica recreacional).

En totes les transaccions relacionades amb assumptes mundans, Vèdics o religiosos, s'utilitza el càlcul. En la ciència de l'amor, en la ciència de la riquesa, en música i teatre, en l'art de cuinar, i de forma similar en medicina i qüestions com el coneixement de l'arquitectura; en prosòdia, en poètica i poesia, en lògica i gramàtica i altres coses,... la ciència de la computació [Ganita] *és molt apreciada. Es fa servir en relació als moviments del sol i d'altres cossos celestials, en relació als eclipsis i la conjunció dels planetes. El nombre, el diàmetre i el perímetre de les illes, oceans i muntanyes, la dimensió extensiva de les fileres de les habitacions i passadissos dels habitants del món,... tot això es fa mitjançant la computació.*

Mahavira (c. 850), *Ganita Sara Samgraha*

2. SISTEMA NUMERAL POSICIONAL I ÚS DEL ZERO

Numerals indis *literals*

- Base 10 des de civilització Harappa
- Al *Yajurveda* (un dels quatre *Vedas*), numerals “amb paraules” per a potències de 10, des de 1 fins a 10^{12}
- En un text una mica anterior, fins a 10^{62} !!
- Matemàtica Jaina: fascinació pels nombres grans connectada amb la seva filosofia del temps i l’espai (nombres fins a 194 dígits!!)

Numerals indis *literals*

Sistema posicional amb numerals *literals*:

0 = cel, buit

1 = Lluna, Terra

2 = ulls, mans

3 = foc

…

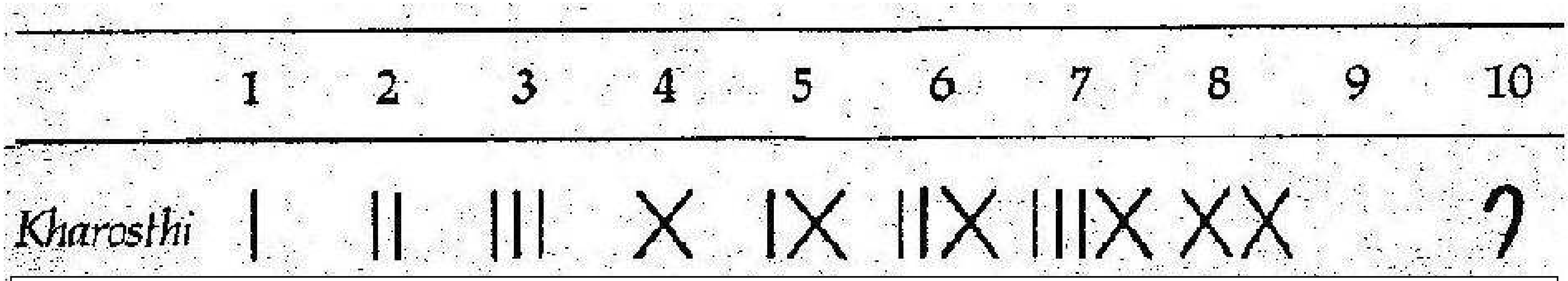
2103 = foc-cel-Lluna-ull

3021 = Lluna-ull-cel-foc

Un exemple al treball de Madhava. Longitud de la circumferència de diàmetre 900.000.000.000 :

227433388233 = deus [33], ulls [2], elefants [8], serps [8], focs [3], arbre [3], qualitats [3], *vedas* [4], estrelles [27], elefants [8], braços [2]

Primers numerals indis



Numerals *Kharosthi*
Segle IV aC – segle II dC
Símbols especials per al 10 i al 20, i per a potències de 10
Fins a 100 numerals generats de forma aditiva
9??

Símbols separats per al 1, 4-9, 10 i potències de 10
Símbols per a múltiples de 10 fins a 90 (i de 100 fins a 900)
Columnes del rei Asoka

Deu símbols per representar 0, 1, …, 9
Sistema decimal posicional com el nostre actual
1ª evidència del símbol de 0 (876 dC)

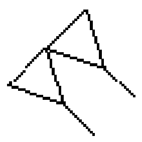
Una breu història del zero

- No història lineal.
- Principis de les matemàtiques a partir de problemes “reals”, més que abstractes.
- Nombres per a col.leccions d’objectes.
- Dos usos:
  1. Indicador de posició buida en sistema numeral posicional.
  2. Com a *nombre.*

Mesopotàmia

- Sistema posicional (base 60) però sense indicador per al zero.
- Idea del "no res", però no com a nombre, sinó com a "manca" de nombre, com una marca de puntuació.
- Segons el context (2106 o 216?)
- **Ús 1:**

~ 400 aC :



~ 700 aC: altres notacions a Kish (sud-centre Iraq)

Però mai al final del nombre, sempre entre dos dígits.

Grècia

- No sistema numeral posicional.
- Matemàtiques basades en geometria.
- Observacions astronòmiques: primer ús de la notació 0 (marques de moneda a la sorra?)
- **Ús 1:**
  - a l'Almagest de Ptolomeu (130 dC), tant entre dígits com al final,
  - però no generalitzat ni fermament establert,
  - només una marca de puntuació.

Índia

- Zero a travès d'astronomia grega (?)
- Aryabhata (~ 500 dC): sistema numeral posicional *alfabètic* (sense zero).
- *Kha* = posició, que després esdevindrà zero (**ús 1**)
- Noms per al zero, però no símbol fins a la primera evidència: 876 dC (Gwalior)
- **Ús 2:**

Brahmagupta (628), Mahavira (830), Bhaskara II (1150):

Regles aritmètiques en relació al zero i als nombres negatius.

Índia

Segons Brahmagupta:

Un nombre positiu o negatiu quan es divideix per zero dóna una fracció amb zero al denominador.

Segons Mahavira:

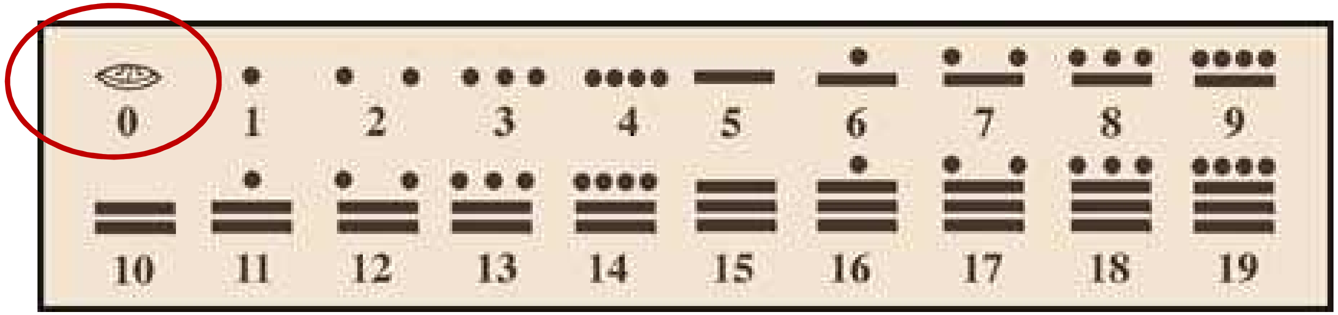
Un nombre no canvia quan és dividit per zero.

Segons Bhaskara II:

Una quantitat dividida per zero esdevé una fracció amb denominador zero. Aquesta fracció representa una quantitat infinita.

Els Maies

- 250-900 dC: Sud Mèxic + Guatemala + Nord Belize
- ~ 665: sistema numeral posicional, base 20, amb símbol per al zero.



Transmissió del sistema numeral indi

- 662: el religiós siri Severus Sebokt esmenta per primer cop els numerals indis, fora de l'Índia.
- 885: Al-Khwarizmi escriu *sobre l'art hindú de comptar*, que serà traduït al llatí (mot *algorisme*).
- 967-969: Gerbert d'Aurillac i l'àbac.
- 1200: Leonardo Pisano (Fibonacci) a Europa:
  - *Nombres* 1 a 9, i *signe* 0.
  - Progrès no generalitzat, resistència a l'ús del zero.
- 1247: apareix 0 en tractat matemàtic xinès.

Multiplicació a l'estil Vèdic (?)

Exemple 1: Multiplicar

Nombr
88
96
84

= 8448

Swami B. K. Tirthaji (1884-1960)

Matemàtiques Vèdiques (1965)

Reconstrucció de 16 *sutras* i 13 *sub-sutras* d'un apèndix de l'*Atharvaveda* (c. 1000 aC)

Original sense localitzar, incertesa quant a l'autenticitat

Base x = potència de 10 més
als dos nombres
a, b = "defecte" respecte a x dels dos nombres
$(x-a)(x-b) = x(x-a-b) + ab$

) =
= 100 (100-12-4) + 48 = 8400 + 48 =
= 8448

Multiplicació a l'estil Vèdic (?)

Exemple 2: Multiplicar 1038 per 1006

Nombre	Excès
(1000)	
1038	38
1006	6
1044	228

= 1044228

Base x = potència de 10 més propera als dos nombres
a, b = excès respecte a x dels dos nombres
$(x+a)(x+b) = x(x+a+b) + ab$

$x = 1000$, $a = 38$, $b = 6$
(1000+38)(1000+6) =
= 1000 (1000+38+6) + 228 = 1044228

Multiplicació a l'estil Vèdic (?)

Exemple 3: Multiplicar 128 per 89

(100)

Nombre	Excès/Defecte
128	28
89	(11)
117	(308)
117 - 4	400 - 308
113	92

= 11392

x = base, a =excès, b = defecte

$(x+a)(x-b) = x(x+a-b) - ab$

$x = 100$, $a = 28$, $b = 11$

$(100+28)(100-11) =$

$=100\ (100+28-11) - 308 =$

$= 100 \cdot 117 - 400 + 400 - 308 = 11392$

Multiplicació a l’estil Vèdic (?)

Exemple 4: Multiplicar 36 per 53 [*verticalment i en creu*]

Desenes	Unitats
3	6
5	3

[3·5][3·3 + 5·6][6·3]

[15][39][18] = 1908

$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$x = 10$

$(3\cdot 10+6)\cdot(5\cdot 10+3) =$

$= 15\cdot 10^2 + 39\cdot 10 + 18 = 1908$

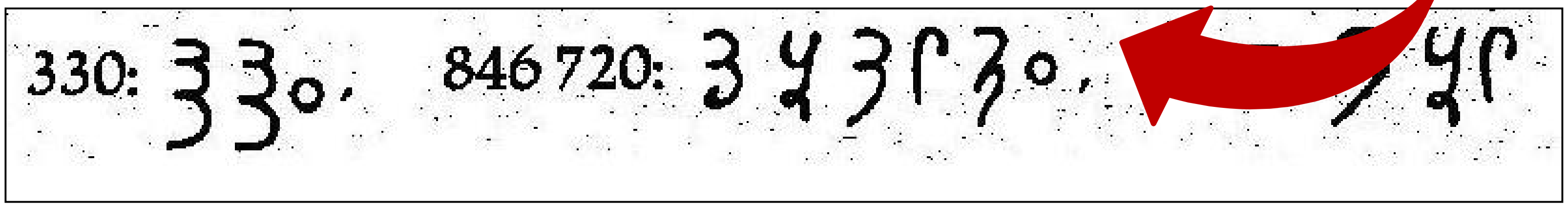
Multiplicació a l'estil Vèdic (?)

Per pensar….

1. 79 · 85
2. 105 · 112
3. 112 · 94
4. 41 · 27
5. 87 · 78

Manuscrit Bakhshali

- Manuscrit matemàtic, escrit sobre tronc de bedoll trobat el 1881 prop del poble de Bakhshali a la subdivisió de Yusufzai del districte de Peshawar (actualment a Pakistan).
- Destruït en gran part.
- Incertesa quant a la seva data, segles III - IV dC?
- Sembla ser un comentari d'un treball matemàtic anterior.
- Biblioteca Bodleian (Oxford).



Manuscrit Bakhshali

- Conté:

- Aritmètica (fraccions, arrels quadrades, interès i “regla de tres”).
- Àlgebra (equacions simples i simultànies, equacions quadràtiques, progressions).
- Alguns problemes de geometria i agrimensura.

- Organitzat en grups de *sutras*:
  1. Regla (*sutra*).
  2. Exemple (primer amb paraules i després en forma notacional).
  3. Solució.
  4. Prova.

Manuscrit Bakhshali

Per indicar signe negatiu:
+ després del nombre

$$\left|\begin{array}{cc} 3 & 1+ \\ 4 & 2 \end{array}\right| \quad \text{means } 3/4 \text{ minus } 1/2$$

Per indicar incògnita: •

$$\left|\begin{array}{ccccc} \bullet & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \text{bha } 32 \\ & 3+ & 3+ & 3+ & \end{array}\right| \quad \text{phala } 108$$

Find number 32 divided by $(2/3)^3$. It equals 108

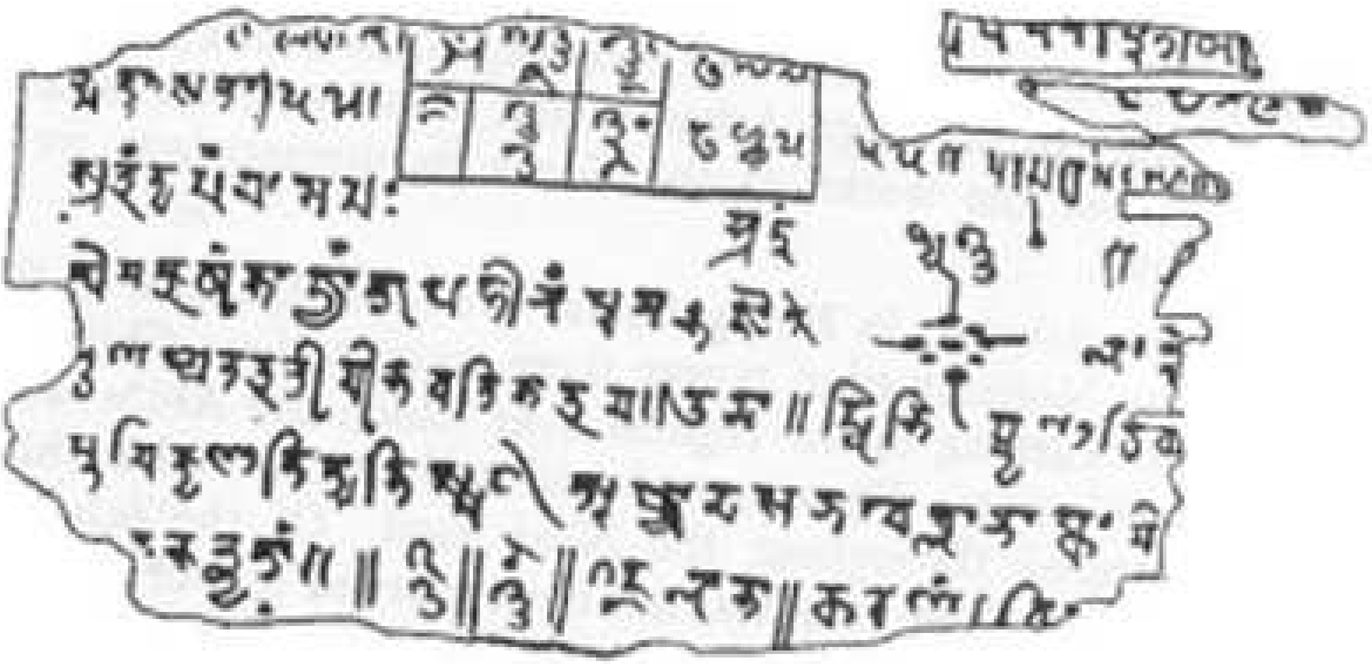
Manuscrit Bakhshali

Si *p* (*pramana*) dóna *ph* (*phala*), què donarà *i* (*iccha*)?

Dos patges són ajudants d'un rei. Pels seus serveis un guanya 13/6 dinars diaris i l'altre 3/2. El primer deu 10 dinars al segon. Calculeu i digueu-me quan els dos tindran la mateixa quantitat.

	P **(dia)**	***Ph*** **(dinars)**	***I*** **(dies)**	***Ph·I / P***
1er	1	13/6	30	65
2on	1	3/2	30	45

Manuscrit Bakhshali



Algunes referències bibliogràfiques

Joseph, G. G. (1990). *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*. London: Penguin Books

Katz, V. (ed.) (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3ª ed.). Boston, etc: Addison-Wesley

Katz, V. (2010). Ideas of Calculus in Islam and India. *Mathematics Magazine*, 68 (3): 163-174

Plofker, K. (2008). *Mathematics in India*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

Roy, R. (1990). The discovery of the series formula for *π* by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Mathematics Magazine*, 63 (5): 291-306

LA MATEMÀTICA ÍNDIA

3. RESOLENT EQUACIONS: ANÀLISI INDETERMINADA

Mònica Blanco

MA3 Departament de Matemàtica Aplicada III

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola d'Ujjain

Brahmagupta (598-)
Bhaskara II (1114-)

Qui fa què?

- **CONGRUÈNCIES LINEALS**
  - Brahmagupta (628), *Brahma Sputa Siddhanta: kuttaka* (“polveritzador”).

- **EQUACIÓ DE PELL**
  - Brahmagupta (628), *Brahma Sputa Siddhanta: samasa* (mètode de composició).
  - Bhaskara II (1150), *Lilavati: chakravala* (mètode cíclic).

3.1. CONGRUÈNCIES LINEALS

(EQUACIONS DIOFÀNTIQUES)

Presentació del problema

$$N?\ \text{tal que}\ N \equiv a\ (mod\ r)\ \text{i}\ N \equiv b\ (mod\ s)$$

$$x?, y?\ \text{tals que}\ N = a + rx = b + sy$$

$$rx + c = sy,\ \text{on}\ c = a - b$$

- *Resolució “moderna”:* Algorisme d’Euclides i identitat de Bézout.
- **Mètode Brahmagupta**: *kuttaka* [cap. 18, §§ 3-5].

Origen astronòmic del problema

Problema d'Aryabhata. El residu de les revolucions de *Sani* (Saturn) és de 24. Trobeu l'*ahargan*a (nombre de dies transcorreguts des d'una època fixada fins al dia d'avui) i les revolucions de *Sani*.

Solució:

$33641\,x - 24 = 394479375\,y$

x = *ahargana* = 346688814
y = nombre de revolucions de *Sani* = 32202

Mètode de Brahmagupta

Exemple: $N?$ tal que $N \equiv 10 \ (mod\ 137)$ i $N \equiv 0 \ (mod\ 60)$

$$137x + 10 = 60y$$

$$\begin{array}{|l} 137 = 2 \cdot 60 + 17 \\ \ \ 60 = 3 \cdot 17 + 9 \\ \ \ \ 17 = 1 \cdot 9 + 8 \\ \ \ \ \ 9 = 1 \cdot 8 + 1 \end{array}$$

Llista de quocients

0
2
3
1
1

Busquem v, w tals que:

$$1 \cdot v \pm 10 \equiv 0 \ (mod\ 8)$$

$$1 \cdot v - 10 = 8w$$

$$v = 18, w = 1$$

Nombre senar de quocients (5)

Mètode de Brahmagupta

0	0	0	0	0	130	
2	2	2	2	297	297	$297 = 130 \cdot 2 + 37$
3	3	3	130	130		$130 = 37 \cdot 3 + 19$
1	1	37	37			$37 = 19 \cdot 1 + 18$
1	19	19				$19 = 18 \cdot 1 + 1$
18	18					
1						

Una solució és $x = 130$, $y = 297$.

Mètode de Brahmagupta

Per obtenir una solució més petita, prenem el valor $x = 130$:

Dividiu-lo pel divisor amb el residu més petit; multipliqueu el residu pel divisor amb el residu més gran. Incrementeu el producte pel residu més gran; el resultat és el residu del producte dels divisors.

$$130 = 2 \cdot 60 + 10$$
$$10 \cdot 137 + 10 = 1380$$
$$N \equiv 1380 \ (mod\ 8220)$$
$$y = \frac{1380}{60} = 23 \ (\text{perquè } N = 60y) \rightarrow x = 10$$

- Aquest tipus de problema esmentat per primer cop al treball d'Aryabhata (499), però a Brahmagupta més clar (628).

- Al contrari que Brahmagupta, els autors xinesos treballen amb sistemes de més de dues congruències:

$$N?\ \text{congruent amb } 5 \pmod 6, \text{ i amb } 4 \pmod 5, \text{ i amb } 3 \pmod 4, \text{ i amb } 3 \pmod 2$$

- Fonts? Grècia? Descobertes independents?

- Astronomia com a font de motivació. Per exemple, esdeveniments recurrents dins d'un període astronòmic gran. Aquesta idea també als autors xinesos però no als grecs.

3.2. L’EQUACIÓ DE PELL

Presentació del problema

x? y? enters tals que:

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

Cas particular de l'equació quadràtica:

$$Dx^2 \pm b = y^2$$

Resultat: Si (a,b) i (c,d) són solucions de l'equació de Pell, també ho són els parells ($bc+ad,bd+Dac$) i ($bc-ad,bd-Dac$).

Presentació del problema

A EUROPA

1657 Fermat i el seu repte a la comunitat matemàtica.

1657-1658 Hi participen F. De Bessy, Brouncker i Wallis; Brouncker troba una solució.

1658 Rahn publica un llibre d'àlgebra, que conté l'equació, en l'elaboració del qual hi col.labora Pell.

1766 Euler es confon i l'equació passa a dir-se "de Pell".

1771 Demostració de Lagrange.

PERÒ……

Presentació del problema

… A L'ÍNDIA

- Mètode de composició (*samasa*) de Brahmagupta (628), *Brahma Sputa Siddhanta* [cap. 18, §§ 64-65].
- Mètode cíclic (*chakravala*) de Bhaskara II (1150), *Lilavati*.
- Problema tradicional de les matemàtiques índies.
- Possible motivació astronòmica?
- Fermat & Co. no tenien notícies de les descobertes índies.

Mètode de Brahmagupta

$$(u_0, v_0), Du^2 + c_0 = v^2$$
$$(u_1, v_1), Du^2 + c_1 = v^2$$

$$\Downarrow$$

$$(u_0 v_1 + u_1 v_0, D u_0 u_1 + v_0 v_1), Du^2 + c_0 c_1 = v^2$$

Mètode de Brahmagupta

Exemple:

$$92x^2 + 1 = y^2$$

$$(x_0, y_0) = (1{,}10)$$

$$92x^2 + 8 = y^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 10 & 8 \\ 1 & 10 & 8 \end{matrix}$$

$$(x_1, y_1) = (1 \cdot 10 + 1 \cdot 10{,}92 \cdot 1^2 + 10^2) = (20{,}192)$$

$$92{x_1}^2 + 64 = {y_1}^2$$

$$\left(\frac{20}{8}, \frac{192}{8}\right) = \left(\frac{5}{2}, 24\right)$$

$$92x^2 + 1 = y^2$$

Composada amb si mateixa dóna solució entera $(120{,}1151)$

Mètode de Brahmagupta

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

$$(x_0, y_0)$$

$$Dx_0{}^2 + b_0 = y_0{}^2$$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & b_0 \\ x_0 & y_0 & b_0 \end{array}$$

$$(x_1, y_1) = (x_0 y_0 + x_0 y_0, Dx_0{}^2 + y_0{}^2)$$

$$b_1 = b_0{}^2$$

$$Dx_1{}^2 + b_1 = y_1{}^2$$

$$\left(\frac{x_1}{b_0}, \frac{y_1}{b_0}\right)$$

Les dues arrels quadrades, dividides per l'additiu o substractiu (original), són les arrels per a l'additiu unitat.

Mètode de Brahmagupta

- Limitacions: no hi ha garantia que les solucions generades siguin enteres.
- Col.lecció de regles i exemples, sense cap demostració i sense discutir les condicions d'existència d'arrels.
- Regles per additiu/substractiu 4 [cap. 18, §§ 67-68].

Mètode de Bhaskara

1. *Kuttaka* per escollir de forma adient parells de solucions per a qualsevol additiu.
2. Repetició del procés (*chakravala*)

Mètode de Bhaskara

Exemple: $67x^2 + 1 = y^2$

$$(1{,}8) \text{ solució de } 67x^2 - 3 = y^2$$

$$1 \cdot m + 8 = -3n \text{ (per } kuttaka\text{)}$$

$$\begin{cases} m = 1 + 3t \\ n = -3 - t, \forall t \end{cases}$$

$$t? \text{ tal que } m^2 \text{ el més proper possible a } D \; (= 67)$$

$$t = 2, m = 7$$

$$b_1 = \pm \frac{D - m^2}{b} \text{ (nou additiu)}$$

$$b_1 = -\frac{67 - 49}{-3} = 6$$

Mètode de Bhaskara

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{um + v}{b} \\ v_1 = \sqrt{Du_1{}^2 + b_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1 \cdot 7 + 8}{-3} = -5 \to 5 \\ v_1 = \sqrt{67 \cdot 25 + 6} = \sqrt{1681} = 41 \end{cases}$$

$(5{,}41)$ solució de $67x^2 + 6 = y^2$

$$5 \cdot m + 41 = 6n$$

$|m^2 - 67|$ petit $\to m = 5$

Mètode de Bhaskara

$$(u_2, v_2) = (11,90) \text{ solució de } 67x^2 - 7 = y^2$$

$$11 \cdot m + 90 = -7n$$

$$m = 9$$

$$(u_3, v_3) = (27,221) \text{ solució de } 67x^2 - 2 = y^2$$

$$(u_4, v_4) = (11934,97684) \text{ solució de } 67x^2 + 4 = y^2$$

$$(5967,48842) \text{ solució de } 67x^2 + 1 = y^2$$

Mètode de Bhaskara

- El mètode dóna sempre valors enters en cada pas.
- La repetició del mètode sempre acaba donant solució per a additiu ±4, ±2 o ±1, i partir d'aquí ja es pot trobar solució per a additiu +1.

Per pensar…

1) Resoleu a l'estil Brahmagupta l'equació $8x^2 + 1 = y^2$

2) Proveu el mètode de composició, és a dir, si es verifica:

$$(u_0, v_0), Du^2 + c_0 = v^2$$
$$(u_1, v_1), Du^2 + c_1 = v^2$$

aleshores també es verifica:

$$(u_0 v_1 + u_1 v_0, Du_0 u_1 + v_0 v_1), Du^2 + c_0 c_1 = v^2$$

3) Resoleu $5m + 41 = 6n$ per *kuttaka*.

4) Per què el chakravala de Bhaskara sempre dóna solucions enteres?

LA MATEMÀTICA ÍNDIA

4. SÈRIES DE POTÈNCIES I FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Mònica Blanco

MA3 Departament de Matemàtica Aplicada III

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

fme

Trigonometria a l'Índia

- *Jyotpatti-ganita* (la ciència del càlcul per a la construcció del sinus) o bé *Jya-ganita* (la ciència del càlcul dels sinus).
- Interacció astronomia – trigonometria

  → valor exacte de *π*
- Període Kushan i Gupta: transmissió del coneixement astronòmic grec cap a l'Índia.

  - No Ptolomeu (150 dC), sinó Hiparc (150 aC).

Taules de Sinus

- Primeres referències: Varahamihira (500 dC), *Pancha Siddhanta*, que recull els treballs anteriors *Surya Siddhanta* i *Paitamahasiddhanta*, el primer treball indi conegut sobre trigonometria, amb taules de *jya-ardha* ("mitges-cordes").

- Primera descripció de construcció de taula de sinus a *Aryabhatiya* (s. V) d'Aryabhata I.

- Brahmagupta (628), *Brahma Sputa Siddhanta*

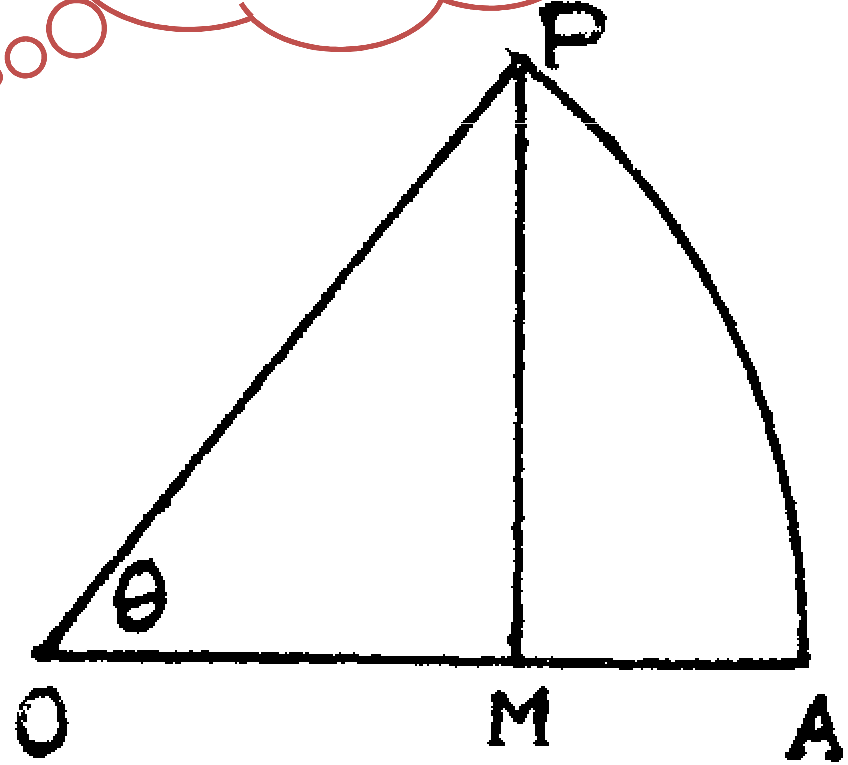
- Bhaskara II (1150), *Siddhanta Siromani*: estudi sistemàtic de la trigonometria.

Taules de Sinus

$$Jya\ (\theta) = R \cdot \sin\ (\theta) = PM$$

Varahamihira (505-587)	120’
Aryabhata I (n. 476)	3438’
Brahmagupta (598-670)	3270’ (900’)
Ptolomeu (85-165)	60’
Hiparc (190-120 aC)	3438’

= 1 rad
si π = 62832/20000

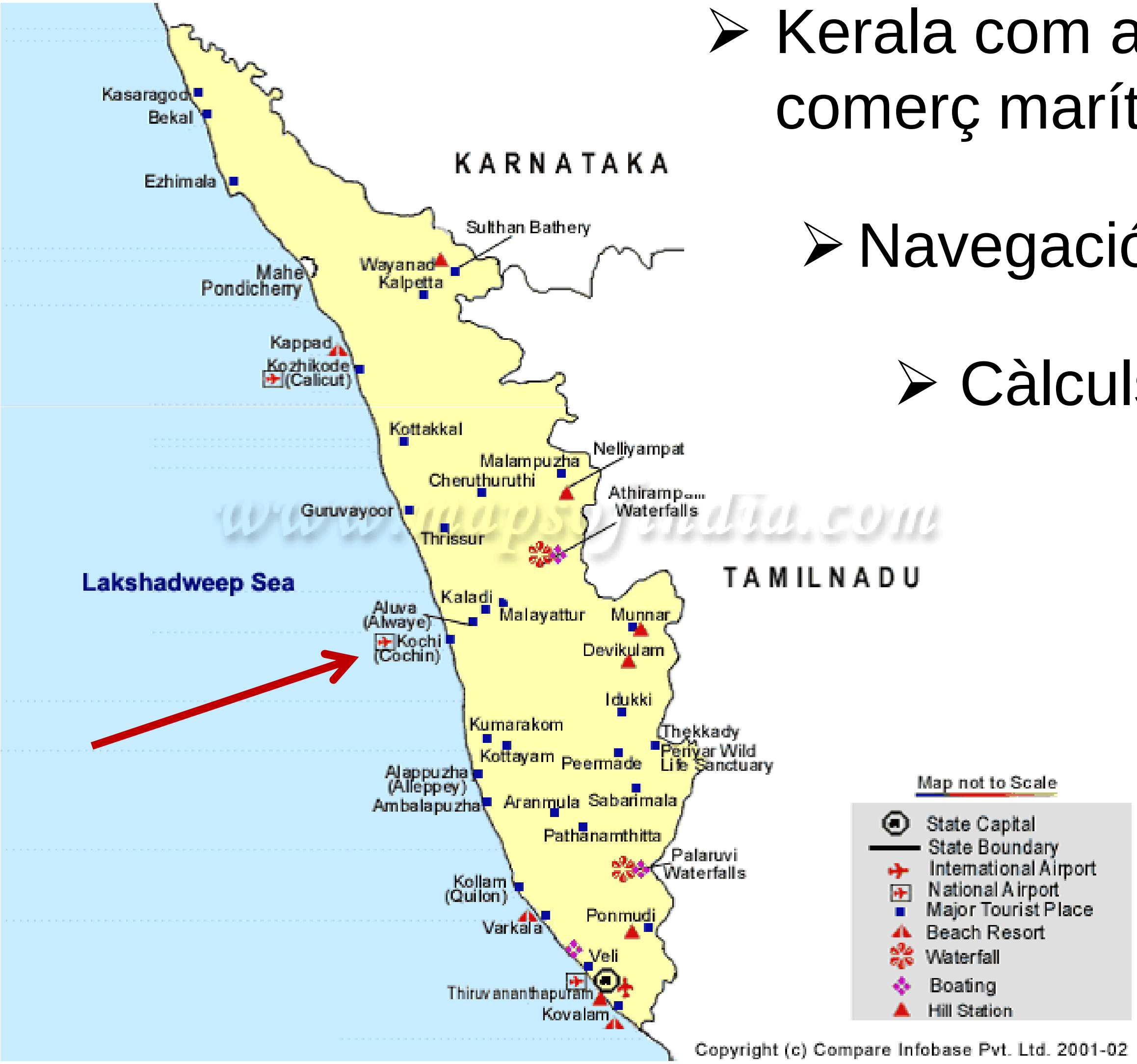


Taules de Sinus

- Etimologia de la paraula *sinus*:

  - Sànscrit: *jya-ardha* (mitja corda), abreujadament *jya* o *jiva*.
  - Àrab:
    - transcrit fonèticament com *jiva* (sense cap significat), escrit *jb*.
    - *jb* interpretat com *jaib*, "pit".
  - Text àrab de trigonometria traduït al llatí (s. XII): *sinus*, com a traducció de "pit".

Escola de Kerala



- Kerala com a centre de comerç marítim.
  - Navegació.
    - Càlculs astronòmics.

Escola de Kerala

- Sèrie de potències per a l'arctangent (Gregory, 1667).

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, x \leq 1$$

- Sèrie de potències per a *π* (Leibniz, 1673)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

- Sèrie de potències per al sinus i cosinus, i aproximacions de segon i tercer ordre (Newton, 1676; Taylor-Gregory).

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Escola de Kerala

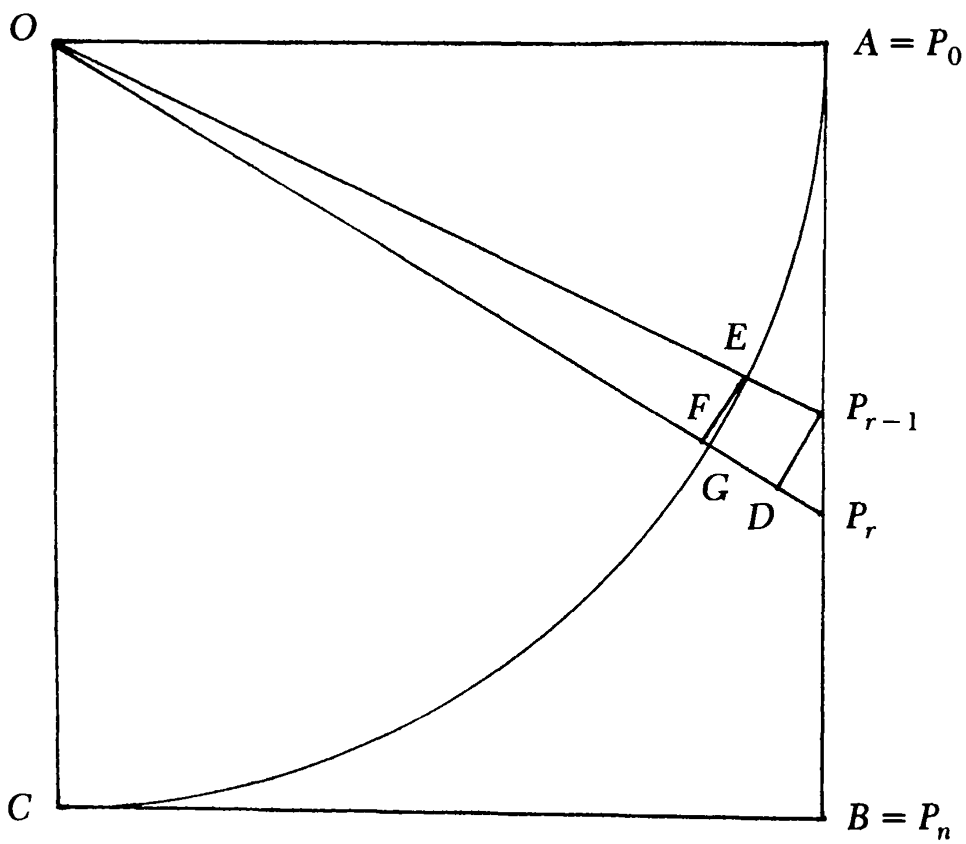
- Madhava de Sangamagramma (~ 1340-1425)
- Alguns tractats astronòmics han sobreviscut.
- Treball sobre sèries i funcions trigonomètriques a través de comentaris:
  - Nilakantha (1445-1545), *Tantrasangraha* (~ 1500)
  - Jyesthadeva (1500-1610), *Yuktibhasa* (~ 1550), en llengua regional, amb demostracions.
  - Narayana (1500-1575) and Sankara Variar (1500-1560), *Kriyakramakari.*

El primer terme és el producte del Sinus donat i del radi de l'arc desitjat dividit pel Cosinus de l'arc. Els termes següents s'obtenen per un procés d'iteració quan el primer terme és multiplicat repetidament pel quadrat del Sinus i dividit pel quadrat del Cosinus. Tots els termes estan dividits per nombres senars 1, 3, 5, … L'arc s'obté sumant i restant (respectivament) els termes de rang senar i aquells de rang parell. Es prendrà com el Sinus, el Sinus de l'arc o aquell del seu complement segons quin sigui més petit. En altres paraules, els termes obtinguts amb aquesta iteració no tendeixen a la magnitud evanescent.

$$r\theta = \frac{r(r\sin\theta)}{1(r\cos\theta)} - \frac{r(r\sin\theta)^3}{3(r\cos\theta)^3} + \frac{r(r\sin\theta)^5}{5(r\cos\theta)^5} - \cdots, \text{ amb } r\sin\theta \le r\cos\theta$$

Prova de la fórmula per a $\pi/4$, segons Madhava-Jyesthadeva

- A partir de la rectificació d'un 1/8 arc de cercle.
- Leibniz a partir de la quadratura del cercle (veure Roy 1990).
- Prova per al sinus i cosinus a partir de diferències i de triangles semblants (veure Katz 2009).



$$AB = n\delta = 1$$

$$P_{r-1}P_r = \delta$$

$\Delta OEF, \Delta OP_{r-1}D$ semblants

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{r-1}D}{OP_{r-1}} \to EF = \frac{P_{r-1}D}{OP_{r-1}}$$

$\Delta OAP_r, \Delta P_{r-1}P_rD$ semblants

$$\frac{P_{r-1}P_r}{OP_r} = \frac{P_{r-1}D}{OA} \to P_{r-1}D = \frac{P_{r-1}P_r}{OP_r}$$

$$EF = \frac{P_{r-1}P_r}{OP_r \cdot OP_{r-1}} \cong \frac{P_{r-1}P_r}{OP_r^{\ 2}} =$$

$$= \frac{\delta}{1 + AP_r^{\ 2}} = \frac{\delta}{1 + (r\delta)^2}$$

$$arc(EG) \cong EF \cong \frac{\delta}{1 + (r\delta)^2}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{1 + (r\delta)^2} \qquad \cdots$$

(i)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \cdots = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

(ii) Un resultat d'Abu Ali al-Hasan ibn Al-Haytham (Basra 965-Cairo 1040):

$$S_n^{(p)} \equiv 1^p + 2^p + \cdots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}, n \text{ gran}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\left[\delta\sum_{r=1}^{n} 1 - \delta^3\sum_{r=1}^{n} r^2 + \delta^5\sum_{r=1}^{n} r^4 - \cdots\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{n^5}\sum_{r=1}^{n} r^4 - \cdots\right] =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Convergència ??

ALGUNES REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Algunes referències bibliogràfiques

Joseph, G. G. (1990). *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*. London: Penguin Books

Katz, V. (ed.) (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3ª ed.). Boston, etc: Addison-Wesley

Katz, V. (2010). Ideas of Calculus in Islam and India. *Mathematics Magazine*, 68 (3): 163-174

Plofker, K. (2008). *Mathematics in India*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

Roy, R. (1990). The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Mathematics Magazine*, 63 (5): 291-306

त्वां धन्यं वदामि

Gràcies!